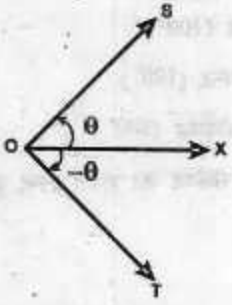
त्रिकोणमिति (TRIGONOMETRY)

1.1 कोण एवं मापन पद्धति:

आप वर्ग दशम के सामान्य गणित की पुस्तक द्वारा त्रिकोणमिति से परिचित हो चुके हैं। दैनिक जीवन में त्रिकोणमिति का उपयोग त्रिकोणमितीय अनुपात को आधार मानकर गणितीय प्रश्नों के हल में किया जाता है। फलतः कोण एवं उसके मापन की विभिन्न पद्धतियों का अध्ययन सर्वप्रथम आवश्यक प्रतीत होता है।

कोण: एक ही आदि बिन्दु वाली दो किरणों के सम्मिलन को कोण कहते हैं। समतल के किसी बिन्दु पर 360° का कोण बनता है। त्रिकोणमिति में किसी भी परिमाप का कोण (धनात्मक या ऋणात्मक) संभव है।



आकृति-1

चित्र में 'O' आद्य बिन्दु एवं OX घ्रामक किरण है। यह घड़ी की सूई की प्रतिकूल दिशा (वामावर्ती) में चलकर कोण XOS=θ बनाती है। इसे धनात्मक माना जाता है। निम्न रूप में इसे दर्शाते हैं-

$$\angle XOS = +\theta$$

यदि घ्रामक किरण OX घड़ी की सूई की दिशा (दक्षिणावर्ती) में चलकर OT पर पहुँचती है तो बनाया गया कोण $TOX = (-\theta)$

कोण की माप की तीन प्रचलित पद्धतियाँ हैं-

(क) षट्दशांशक (अंग्रेजी पद्धति)

(ख) शतांशक (फ्रांसीसी पद्धति)

(ग) वृत्तीय् (रेडियन पद्धति)

(क) **षट्दशांशक** पद्धति में 90^0 को एक समकोण के बराबर माना गया है। 1^0 को 60 बराबर भागों में बाँटा गया है एवं प्रत्येक भाग एक मिनट कहलाता है।

प्रत्येक मिनट को 60 बराबर भागों में बाँटा जाता है और प्रत्येक भाग एक सेकेण्ड कहलाता है।

1 समकोण $= 90^0$

1 डिग्री $(1^0) = 60$ मिनट $(60')$

1 मिनट $(1') = 60$ सेकेण्ड $(60'')$

(ख) **शतांशक** पद्धति में एक समकोण को 100 गेड, 1 ग्रेड को 100 मिनट एवं प्रत्येक मिनट को 100 सेकेण्ड में बाँटा जाता है।

1 समकोण $= 100$ ग्रेड (100^g)

1 ग्रेड $(1^g) = 100$ मिनट $(100')$

1 मिनट $(1') = 100$ सेकेण्ड $(100'')$

विभिन्न पद्धतियों में मिनट तथा सेकेण्ड का संकेत निम्न प्रकार होना चाहिए-

शतांशक में $(',')$

षट्दशांशक में $('')$

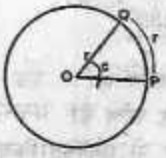
वृत्तीय पद्धति में कोण की माप का मात्रक रेडियन है।

1 रेडियन $= \frac{180^0}{\pi}$

1 रेडियन $= \frac{200}{\pi}$ ग्रेड

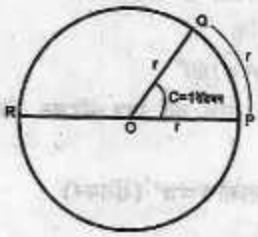
समतल पर किसी वृत्त की त्रिज्या के बराबर उस वृत्त की परिधि पर काटे गये चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण एक रेडियन के बराबर होता है।

$\angle POQ = 1$ रेडियन



आकृति-2

रेडियन अचर कोण:



आकृति-3

मान लीजिए कि PQR वृत्त का केन्द्र O है एवं त्रिज्या r है। वृत्त में चाप PQ त्रिज्या r के बराबर लिया गया। बिन्दु O से P तथा Q को मिलाया गया। OP को O की तरफ परिधि के R बिन्दु तक बढ़ाया गया है।

रेडियन की परिभाषा से $\angle POQ = 1$ रेडियन

ज्यामिति से हम जानते हैं कि "किसी वृत्त के केन्द्र पर बना कोण संगत चापों के समानुपाती होते हैं।"

$$\therefore \frac{\angle POQ}{\angle POR} = \frac{\text{चाप } PQ}{\text{चाप } PQR}$$

या, $$\frac{\angle POQ}{2\text{समकोण}} = \frac{r}{\text{अर्द्धपरिधि}} = \frac{r}{\pi r}$$

या, $$\frac{\angle POQ}{2\text{समकोण}} = \frac{1}{\pi}$$

या, $$\angle POQ = \frac{2\text{समकोण}}{\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$\therefore$ 1रेडियन $= \frac{180^0}{\pi}$

$\because$ 180^0एक नियत कोण एवं π एक अचर अपरिमेय संख्या है

$\therefore$ रेडियन एक अचर कोण है।

1 रेडियन को 1^c से संबोधित किया जाता है।

$$\boxed{\pi \text{ रेडियन} = \pi^c \Rightarrow \pi = 180^0}$$

रेडियन, ग्रेड एवं डिग्री में संबंध:

हम जान चुके हैं कि

$$\pi^c = 200^g = 180^0$$

मान लिया किसी कोण की माप रेडियन, ग्रेड एवं डिग्री में क्रमशः C, G, D से दर्शाया गया है।

$\because 180^0 = 2$ समकोण $= \pi^c$ (रेडियन)

या, $1^0 = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

या, D डिग्री $= \frac{\pi \times D}{180}$ रेडियन

$\therefore \frac{\pi D}{180} = c$

या $\frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$ ——(1)

इसी प्रकार,

2 समकोण $=$ 200 ग्रेड

$180^0 = 200$ ग्रेड

$1^0 = \frac{200}{180}$ ग्रेड

$D^0 = \frac{200 \times D}{180}$ ग्रेड

$\therefore \frac{200D}{180} = G$

या, $\frac{D}{180}=\frac{G}{200}$ ——— (2)

अब (1) और (2) से

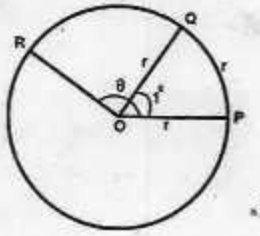
$\therefore \frac{D}{180}=\frac{C}{\pi}=\frac{G}{200}$

$\frac{2D}{180}=\frac{2C}{\pi}=\frac{2G}{200}$

$\therefore \frac{D}{90}=\frac{2C}{\pi}=\frac{G}{100}$

अब सिद्ध करना है कि कोण की वृत्तीय माप उस वृत्त के चाप और त्रिज्या का अनुपाती होता है।

अर्थात् $\theta=\frac{\ell}{r}$ रेडियन



मान लिया कि O केन्द्र तथा r त्रिज्या का एक वृत्त PQR है। एक चाप PR लम्बाई ℓ के बराबर लिया गया। चाप ℓ द्वारा केन्द्र पर बना कोण $POR=\theta$ (माना)

रेडियन की परिभाषा से, $\angle POQ=1^c$

ज्यामिति से,

वृत्त के केन्द्र पर का कोण संगत चापों का समानुपाती होता है।

$\therefore \quad \frac{\angle POQ}{\angle POR}=\frac{\text{चाप } PQ}{\text{चाप } PQR}$

$\frac{1^c}{\theta}=\frac{r}{l}$

या, $r\theta=l^c$

$$\therefore \quad q = \left(\frac{\text{चाप}}{r}\right)^c$$

$$\text{वृत्त के केन्द्र पर कोण} = \frac{\text{संगत चाप की लम्बाई}}{\text{संबंधित वृत्त की त्रिज्या}}$$

सावधानी:

$q = \left(\frac{\text{चाप}}{r}\right)^c$, का प्रयोग करने में यह ध्यान रखना अनिवार्य है कि θ रेडियन माप में हो। डिग्री (अंश) θ रहने पर रेडियन में बदल लेना अनिवार्य होगा।

π की परिभाषा: - किसी वृत्त की परिधि तथा इसके व्यास का अनुपात सभी वृत्त के लिए एक समान होता है। इसी अचर राशि का मान ग्रीक (यूनानी) अक्षर π (पाई) द्वारा उच्चरित है।

साधित प्रश्न:-

1. 80^0 को रेडियन में बदलें-

हल:-

$\because 180^0 = \pi$ रेडियन

$$\therefore 1^0 = \frac{\pi^c}{180}$$

$$\therefore 80^0 = \frac{\pi \times 80}{180} = \frac{4\pi^c}{9} = \frac{4\pi}{9} \text{ रेडियन}$$

2. 300 ग्रेड को रेडियन में बदलें-

हल: $\because 200$ ग्रेड $= \pi$ रेडियन

$$\therefore 1^g = \frac{\pi^c}{200}$$

$$\therefore 300^g = \left(\frac{\pi}{200} \times 300\right)^c = \frac{3\pi^c}{2}$$

3. यदि किसी कोण की माप डिग्री एवं ग्रेड में क्रमश:D एवं G हो तो दिखायें कि $\frac{G+D}{G-D}=19$

हल:-

सूत्र से-

$$\frac{G}{200}=\frac{D}{180}$$

या, $\frac{G}{D}=\frac{200}{180}$

या, $\frac{G}{D}=\frac{10}{9}$

योगान्तर निष्पत्ति से,

$$\frac{G+D}{G-D}=\frac{10+9}{10-9}=\frac{19}{1}=19$$

—

प्रश्नावली-1

- रेडियन मे बदलें-

(i) 45^0 (ii) $67^030'$ (iii) $2^r4'4.5''$

- शतांशक पद्धति में बदलें-

(i) 45^0 (ii) $50^037'57''$ (iii) 2π रेडियन

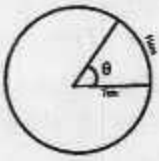
- षटदशांशक पद्धति मे पहले।

(i) 40^g (ii) $56^g87'50''$ (iii) $\frac{\pi}{9}$ रेडियन

- सुबह के ठीक 5 बजे घड़ी के दोनों सूइयों के बीच जो कोण बनता है उसे रेडियन में बदलें।
- किसी समषट्भुज के एक अंत: कोण का मान रेडियन में ज्ञात कीजिए।
- एक समबहुभुज का एक बहिष् कोण $\frac{\pi}{4}$ रेडियन है, तो भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

साधित प्रश्न

1. 7 सेमी त्रिज्या के वृत्त के केन्द्र पर 11 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा बने कोण की माप डिग्री में ज्ञात कीजिए। $(\pi = \frac{22}{7})$



आकृति-5

हल:- $\theta = \frac{l}{r}$ रेडियन

$\theta = \frac{11}{7}$ रेडियन $= \frac{11}{7} \times \frac{180^\circ}{\pi}$

$\theta = \frac{11}{7} \times \frac{180^\circ}{22} = 90^\circ$

प्रश्नावली-2

1. एक वृत्त की त्रिज्या 7 मी0 है, उसके एक चाप से बना हुआ केन्द्र पर का कोण रेडियन माप में $\frac{3}{7}$ है, तो चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2. किसी वृत का 75° का चाप दूसरे वृत्त के 60° के चाप के बराबर है, तो दोनों वृत्तों की त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

1.2 कोण की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

धन और ऋण रेखाखण्ड:

आकृति-6

यहाँ दो लम्बवत सरल रेखाएँ XX' और YY' एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं।

क्षैतिज रेखा XOX' तथा उदग्र रेखा YOY' क्रमशः X-अक्ष और Y-अक्ष एवं O को मूल बिन्दु कहते हैं।

(i) क्षैतिज रेखा खण्ड की लम्बाई YY' की दाईं ओर है धनात्मक,

(ii) क्षैतिज रेखा खण्ड की लम्बाई जो YY' की बाईं ओर है ऋणात्मक,

(iii) उदग्र रेखा खण्ड की लम्बाई जो XX' के उपर है धनात्मक,

(iv) उदग्र रेखा खण्ड की लम्बाई जो XX' के नीचे है, ऋणात्मक मानी जाती है।

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों के मानों की सीमाएँ:-

(i) $\sin\theta$ और $\cos\theta$ का मान (+) से (-) के बीच होता है।

(ii) $\tan\theta$ तथा $\cot\theta$ का मान $(-\infty)$ से $(+\infty)$ के बीच होता है।

(iii) $\sec\theta$ तथा $\operatorname{cosec}\theta$ का मान $(-\infty)$ से (-1) तक तथा $(+1)$ से $(+\infty)$ के बीच होता है।

(iv) $\sec\theta$ तथा $\operatorname{cosec}\theta$ का मान (-1) तथा $(+1)$ के बीच नहीं होगा।

उदाहरण:-

1. निम्नलिखित त्रिज्यक रेखाखण्ड किस पाद में होगा?

(i) 30^0 (ii) 130^0 (iii) 230^0 (iv) -200^0

(v) -500^0 (vi) -1240^0 (vii) 1240^0

हल:-

(i) प्रथम पाद

(ii) द्वितीय पाद

(iii) तृतीय पाद

(iv) द्वितीय पाद

(v) $-500=-2\times360^0+220=220^0$ (तृतीय पाद)

(vi) $-1240^0=-4\times360^0+200^0=200^0$ (तृतीय पाद)

(vii) $-1240^0=3\times360^0+160^0=160^0$ (द्वितीय पाद)

सूत्र
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$90^\circ\mp\theta, 180^\circ\mp\theta, 270^\circ\mp\theta, 360^\circ\mp\theta$

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ छह हैं-

sin
cos
tan
cot
sec
cosec

त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों $90^\circ\mp\theta$ या $270^\circ\mp\theta$ के साथ संलग्न रहने पर निम्न प्रकार का सूत्र प्राप्त होता है।

जैसे-sin,tan,cotरहने पर क्रमश:cos,cot,tanके समान तथा निष्पति एवं कोण समान एक ही पाद मे रहने पर धनात्मक मान भिन्न पाद मे रहने पर ऋणात्मक मान होगा। यथा $\sin(90^\circ+\theta)$ में sin तथा $90^\circ+\theta$ दोनों द्वितीय पाद में है अत:, $\cos\theta$ के बराबर होगा और धनात्मक होगा।

पुन: sin $(270^\circ-\theta)$ में sin द्वितीय $270^\circ-\theta$ तृतीय पाद में रहने के कारण ऋणात्मक मान $\cos\theta$ के बराबर होगा।

अर्थात् $\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta$

इसी प्रकार $180^\circ\mp\theta, 360^\circ\mp\theta$ के लिए जो निष्पति संलग्न होगा वही निष्पति के

बराबर होगा परन्तु चिह्न धनात्मक ऋणात्मक दोनों के पाद क्रमशः समान असमान होने पर निर्भर करेगा। जैसे- $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

यहाँ cos चतुर्थ एवं $180^\circ - \theta$ द्वितीय पाद में हैं। दोनों का पाद भिन्न है। इसलिए ऋणात्मक में समान निष्पति $-\cos\theta$ लिखा गया है।

उपर्युक्त सूत्र को सिद्ध करने की विधि ऊपर के कक्षा में मिलेगी।

सारणी

निष्पत्ति	$270^\circ - \theta$	$270^\circ + \theta$	$360^\circ - \theta$	$360^\circ + \theta$	$n\times360^\circ + \theta$	$n\times360^\circ - \theta$
sin	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$+\sin\theta$	$+\sin\theta$	$-\sin\theta$
cos	$-\sin\theta$	$+\sin\theta$	$+\cos\theta$	$+\cos\theta$	$+\cos\theta$	$+\cos\theta$
tan	$+\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$+\tan\theta$	$+\tan\theta$	$-\tan\theta$
cot	$+\tan\theta$	$-\tan\theta$	$-\cot\theta$	$+\cot\theta$	$+\cot\theta$	$-\cot\theta$
sec	$-\operatorname{cosec}\theta$	$+\operatorname{cosec}\theta$	$+\sec\theta$	$+\sec\theta$	$+\sec\theta$	$+\sec\theta$
cosec	$-\sec\theta$	$-\sec\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$	$+\operatorname{cosec}\theta$	$+\operatorname{cosec}\theta$	$-\operatorname{cosec}\theta$

उदाहरण 1: $\cos(-585^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\cos(-585^\circ)$$
$$= \cos 585^\circ$$
$$= \cos(360^\circ + 225^\circ) \qquad \{\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta\}$$
$$= \cos 225^\circ \qquad \{\because \cos(-\theta) = \cos\theta\}$$
$$= \cos(180^\circ + 45^\circ)$$
$$= -\cos 45^\circ$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

उदाहरण 2.

यदि $\alpha = 2220^\circ$ तो $\sin\alpha - \cos\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:.

$$\sin\alpha = 2220^\circ$$
$$= \sin(360^\circ \times 6 + 60^\circ)$$

$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \cos 2220^\circ = \cos\{360^\circ \times 6 + 60^\circ\}$$

$$= \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}$$

प्रश्न से,

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1.732-1}{2}$$

$$= \frac{.732}{2} = .366$$

उदाहरण 3:

किसी त्रिभुज ABC में सिद्ध कीजिए कि –

$$\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A+2B}{2} = \sin\frac{A+2C}{2}$$

हल:– किसी त्रिभुज ABC में,

$$A+B+C = 180^\circ$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{B-(180^\circ - A - B)}{2} = \cos\frac{180^\circ + A + B + B}{2}$$

$$= \cos - \left\{\frac{180^\circ - (A+2B)}{2}\right\} = \cos\left\{\frac{180^\circ - (A+2B)}{2}\right\}$$

$$= \cos\left\{90^\circ - \frac{(A+2B)}{2}\right\} = \sin\frac{A+2B}{2}$$

पुनः $\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A+B+C-A-2C}{2}$

$$= \cos\frac{-180^\circ - (A+2C)}{2}$$

$$= \cos\left\{90^\circ - \frac{A+2C}{2}\right\}$$

$$= \sin\frac{A+2C}{2} \quad \text{.....(ii)}$$

(i) और (ii) से

$$\cos\frac{B-C}{2}=\sin\frac{A+2B}{2}=\sin\frac{A+2C}{2}$$

उदाहरण 4: किसी चतुर्भुज $ABCD$ में सिद्ध कीजिए कि-

$\sin(A+B)+\sin(C+D)=0$

हल:- किसी चतुर्भुज के चारों अन्त: कोणों का योग 360^0 होता है।

$\therefore A+B+C+D=360^0$

या, $A+B=360^0-(C+D)$

$\therefore \sin(A+B)+\sin(C+D)$

$=\sin\{360^0-(C+D)\}+\sin(C+D)$

$=-\sin(C+D)+\sin(C+D)=0$

प्रश्नावली-3

1. बताइये कि निम्नलिखित कोण की तल में स्थिति कहाँ होगी?

(i) 30^0 (ii) -30^0 (iii) 90^0 (iv) -90^0 (v) 180^0 (vi) -1090^0

(vii) 1090^0 (viii) 120^0 (ix) -120^0 (x) 4420^0 (xi) -4420^0

2. निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i) $2\cos^2 45^0+\sin 30^0+\frac{1}{2}\cos 0^0-\tan 45^0$

(ii) $\sin 120^0+\cos 150^0+\tan^2 120^0+\tan^2 135^0+\cos 180^0$

(iii) $\sin^2 135^0+\cos^2 120^0-\sin^2 120^0+\tan^2 150^0$

(iv) $\sin 112^0+\cos 74^0-\sin 68^0+\cos 106^0$

(v) $\sin 420^0.\cos 390^0+\cos(-300^0).\sin(-330^0)$

(vi) $\cos 570^0.\sin 510^0-\sin 330^0.\cos 390^0$

(vii) $\tan 225^0.\cot 405^0+\tan 765^0.\cos 675^0$

(viii) $\cot A+\tan(180^0+A)+\tan(90^0+A)+\tan(360^0-A)$

(ix) $\cos A+\sin(270^0+A)+\sin(270^0-A)+\cos(180^0+A)$

3.(A) निम्नलिखित त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को 45^0 से कम के धनात्मक कोण की निष्पत्तियों के पदों में व्यक्त कीजिए:

(i) $\cos 1410^0$ (ii) $\sin 843^0$ (iii) $\cos(-928^0)$ (iv) $\tan(-240^0)$

(v) $\cos 287^\circ$ (vi) $\sin(-65^\circ)$ (vii) $\tan 1145^\circ$ (viii) $\sin 470^\circ$

(ix) $\cot(-710^\circ)$ (x) $\operatorname{cosec} 1470^\circ$ (xi) $\sec(-1150^\circ)$ (xii) $\tan 500^\circ$

(xiii) $\cot 850^\circ$ (xiv) $\sin(-1332^\circ)$ (xv) $\operatorname{cosec}(-960^\circ)$ (xvi) $\tan 1760^\circ$

3.(B) θ के निम्नलिखित मान के लिए $\sin\theta - \cos\theta$ का चिह्न बताइये:

(i) -457° (ii) 825° (iii) -634°

3.(C) θ के निम्नलिखित मान के लिए $\sin\theta + \cos\theta$ का चिह्न बताइये:

(i) 278° (ii) -356° (iii) 140°

4. सिद्ध कीजिए कि

(i) $\tan x + \tan(-y) - \tan(180^\circ - y) = \tan x$

(ii) $\tan(180^\circ - A) + \tan(180^\circ + A) + \sin(-A) = \sin(180^\circ + A)$

(iii) $\dfrac{\sin(360^\circ - \theta) + \cos(-\theta)}{\tan(-\theta) - \cot(360^\circ - \theta)} = \dfrac{\sin(90^\circ + \theta) + \cos(270^\circ - \theta)}{\cot(180^\circ + \theta) + \tan(-\theta)}$

(iv) $\sin(180^\circ + A).\cos(90^\circ + A) - \cos(180^\circ + A).\sin(90^\circ + A) = 1$

(v) $\cos(90^\circ + A).\cos(180^\circ - A) + \sin(90^\circ + A).\sin(180^\circ + A) = 0$

(vi) $\dfrac{\sin(270^\circ - \theta)\cos(90^\circ + \theta)}{\tan(90^\circ + \theta)} - \dfrac{\sin(270^\circ - \theta)}{\sec(180^\circ + \theta)} = -1$

(vii) $\dfrac{\cos\theta}{\sin(90^\circ + \theta)} + \dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} - \dfrac{\tan(90^\circ + \theta)}{\cot\theta} = 3$

(viii) $\dfrac{\cos(90^\circ + \theta).\sec(-\theta).\tan(180^\circ - \theta)}{\sec(360^\circ - \theta).\sin(180^\circ + \theta).\cot(90^\circ - \theta)} = -1$

(ix) $\dfrac{\tan(90^\circ + \theta).\sin(180 + \theta).\sin(270^\circ + \theta)}{\cos(270^\circ - \theta).\cos(180^\circ - \theta).\cot(360^\circ - \theta)} = 1$

(x) $\dfrac{\cos^2(180^\circ - \theta)}{\sin(-\theta)} + \dfrac{\cos^2(270^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} = -\operatorname{cosec}\theta$

(xi) $\dfrac{\cos(180^\circ - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)} - \dfrac{\sin^2(360^\circ - \theta)}{\cos(270^\circ - \theta)} = -1$

5. यदि A,B,C किसी त्रिभुज के तीनों कोण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\cos C + \cos(A + B) = 0$

(ii) $\tan A + \tan(B + C) = 0$

(iii) $\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{C}{2}=0$

6. यदि ABCD चक्रीय चतुर्भुज हो, तो सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\sin(A+B)+\sin(C+D)=0$

(ii) $\cos\frac{A+C}{2}-\cos\frac{B+D}{2}=0$

(iii) $\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C+D}{2}$

7. चक्रीय चतुर्भुज ABCD में सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D=0$

(ii) $\sin A+\sin B-\sin C-\sin D=0$

8. मान निकालिए-

(i) $\frac{\cos 150^\circ.\tan 300^\circ}{\cot 225^\circ+\sin(-30^\circ)}$

(ii) $\sec\left(\frac{7\pi}{6}\right).\cot\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{-11\pi}{6}\right).\operatorname{cosec}\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$

(iii) $\tan\frac{11\pi}{3}-2\sin\frac{4\pi}{6}-\frac{3}{4}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}+4\cos^2\frac{17\pi}{6}$

9. सरल कीजिए-

(i) $\frac{\sin(180^\circ-\theta).\cos(180^\circ-\theta).\tan\theta}{\cos(90^\circ-\theta).\cot(180^\circ-\theta).\cot\theta}$

(ii) $\frac{\cos(-\theta).\cos(90^\circ+\theta).\sec\theta}{\tan(180^\circ-\theta).\cot(180^\circ+\theta).\cos(90^\circ-\theta)}$

10.सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\cot\frac{\pi}{20}.\cot\frac{3\pi}{20}.\cot\frac{5\pi}{20}.\cot\frac{7\pi}{20}.\cot\frac{9\pi}{20}=1$

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}=2$

(iii) $\sin\{(2n+1)\pi-\theta\}=\sin\theta$

(iv) $\cos(n\pi+\theta)=(-1)^n\cos\theta$ (जहाँ n कोई पूर्णांक है)

[संकेत $(-1)^n=1$ जहाँ n समपूर्णांक या शून्य है $(-1)^n=-1$ जहाँ n विषम पूर्णांक हो]

1.3 संयुक्त कोण

प्रस्तावना:- इस अध्याय में दो या दो से अधिक कोणों के बीजगणितीय योग से बने कोणों के फलन का अध्ययन किया जायगा।

दो या दो से अधिक कोणों के बीजगणितीय योग से बने कोण को संयुक्त कोण कहते हैं।

इस प्रकार $A\pm B, A+B+C, A+B-C$ आदि संयुक्त कोण हैं। दो कोणों के योग के sine , cosine और *tangent* का मान ज्ञात करना

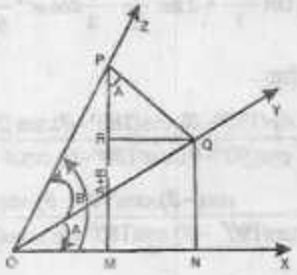
$(A+B)<90°$, तो सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\sin(A+B)=\sin A.\cos B+\cos A.\sin B$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A.\cos B-\sin A.\sin B$

(iii) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}$

हल:-



आकृति-7

माना कि OX एक धात्मक किरण धनात्मक दिशा में चलकर OY पर पहुँचती है और ∠XOY=A बनाती है, पुनः उसी दिशा में चलकर OZ पर पहुँचती है जहाँ

∠ YOZ=B बनाती है।

∴ ∠XOZ=A+B (जहाँ $A+B<90°$)

किरण OZ पर कोई बिन्दु P लिया। P से OX और OY पर क्रमशः PM और PQ लम्ब खींचा। पुनः Q से OX पर QN तथा PM पर QR लम्ब खींचा।

इस प्रकार RQNM एक आयत है।

$\angle$ XOY= $\angle$ OQR=A (एकान्तर कोण)

$\angle$ $QPR = 90^0 - \angle PQR = A$

अब ΔPOM में

$$\sin(A+B) = \sin POM = \frac{MR+RP}{OP} = \frac{NQ+RP}{OP}$$

$$= \frac{NQ}{OP} + \frac{RP}{OP} = \frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP} + \frac{RP}{PQ}\cdot\frac{PQ}{OP}$$

या, $\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

इसी प्रकार

$$\cos(A+B) = \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON-RQ}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{RQ}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OQ}\times\frac{OQ}{OP} - \frac{RQ}{PQ}\times\frac{PQ}{OP}$$

या, $\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

पुनः $\tan(A+B) = \frac{PM}{OM} = \frac{MR+RP}{ON-MN} = \frac{NQ+RP}{ON-RQ} = \frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{RP}{ON}}{\frac{ON}{ON}-\frac{RQ}{ON}}$

$$= \frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{RP}{ON}}{1-\frac{RQ}{ON}}$$

$$= \frac{\frac{NQ}{ON}+\frac{RP}{ON}}{1-\frac{RQ}{RP}\times\frac{RP}{ON}} = \frac{\tan A + \frac{RP}{ON}}{1-\tan A\times\frac{RP}{ON}}$$

[$\because \Delta PRQ \sim \Delta ONQ (A-A-A$ शर्त से सदृश्य)

$\therefore \frac{PR}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = \tan B$, या, $\frac{RP}{ON} = \tan B$]

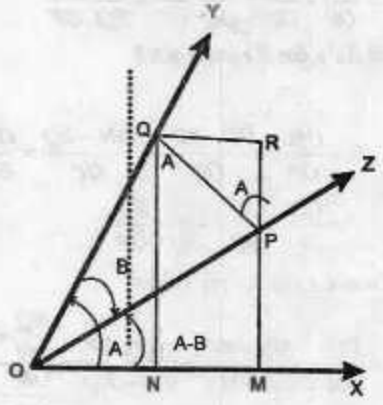
$$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$$

सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin(A-B) = \sin A, \cos B - \cos A.\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$$ जहाँ $O < B < A \angle 90°$



आकृति-8

हल:- माना कि OX घ्रामक किरण घड़ी की सूई की विपरीत दिशा में चलकर OY पर पहुँचती है जहाँ $\angle XOY = A$ बनाती है। पुन: OY से घड़ी की सूई की दिशा में चलकर OZ पर पहुँचती है जहाँ $\angle YOZ = B$ बनाती है।

$\therefore \angle XOZ = A - B$

OZ पर P बिन्दु लिया। P से OX पर PM तथा OY पर PQ लम्ब खींचा। पुन: PM को R तक बढ़ाया। अब Q से OX पर QN तथा PM पर QR लम्ब खींचा।

इस प्रकार QRMN एक आयत है।

$\angle XOY = \angle RQY = A$ (संगत कोण)

$$\therefore \angle RPQ = 90^0 - \angle RQP = 90^0 - (90^0 - A) = 90^0 - 90^0 + A = A$$

अब, $\sin(A-B) = \sin POM = \frac{MP}{OP} = \frac{MR-PR}{OP} = \frac{NQ-PR}{OP} (\because MR = NQ).$

$$= \frac{NQ}{OP} - \frac{PR}{OP}$$

$$\frac{NQ}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} - \frac{PR}{PQ} \times \frac{PQ}{OP}$$

$$= \sin A.\cos B - \cos A.\sin B.$$

पुन: $\cos(A-B) = \cos P\hat{O}M = \frac{OM}{OP} = \frac{ON+NM}{OP} = \frac{ON+QR}{OP} (\tilde{N}M - QR$

$$= \frac{ON}{OP} + \frac{QR}{OP}$$

$$= \frac{ON}{OQ} \times \frac{OQ}{OP} + \frac{QR}{PQ} \times \frac{PQ}{OP}$$

$$= \cos A.\cos B + \sin A.\sin B.$$

पुन: $\tan(A-B) \tan P\hat{O}M = \frac{PM}{OM} = \frac{MR-PR}{ON+NM} = \frac{NQ-PR}{ON+QR}$

या,

$$= \frac{\tan A - \frac{PR}{ON}}{1 + \tan A \times \frac{PR}{ON}}$$

($\because \Delta PRQ \sim \Delta ONQ \angle A - A - A$ सदृश्यता शर्त)

$$\therefore \frac{PR}{ON} - \frac{PQ}{OQ} = \tan B$$

$$\frac{PR}{ON} = \tan B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$$

उदाहरण 1. $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\sin 30^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

उदाहरण 2. $\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

हल:- बायाँ पक्ष $\sin(A+B).\sin(A-B)$

$$= (\sin A.\cos B + \cos A.\sin B)(\sin A.\cos B - \cos A.\sin B)$$

$$= (\sin A.\cos B)^2 - (\cos A.\sin B)^2$$

$$= \sin^2 A.\cos^2 B - \cos^2 A.\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 A.\sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A.\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A - \sin^2 B$$

उदाहरण 3. $5\sin\theta + 12\cos\theta$ का महत्तम एवं न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल:- $5\sin\theta + 12\cos\theta$

$\because \sqrt{5^2+12^2} = 13$

अत: 13 से भाग देने पर

$$13\left\{\frac{5}{13}\sin\theta + \frac{12}{13}\cos\theta\right\}$$

माना कि $\frac{5}{13} = \cos\alpha$

$$\therefore \frac{12}{13} = \sin\alpha$$

अत: $13\{\cos\alpha.\sin\theta + \sin\alpha.\cos\theta\}$

$13\{\sin(\theta+\alpha)\} = 13\sin(\theta+\alpha)$

$\because \sin(\theta+\alpha)$ का महत्तम मान +1, न्यूनतम मान=-1

$\therefore 5\sin\theta + 12\cos\theta$ महत्तम मान $13\times1 = 13$ तथा न्यूनतम मान $13(-1) = -13$

प्रश्नावली–4

1. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\sin 15^\circ$ (ii) $\cos 15^\circ$ (iii) $\tan 75^\circ$ (iv) $\sin 105^\circ$

   (v) $\tan 105^\circ$ (vi) $\cot 15^\circ$

2. यदि $\sin A = \frac{12}{13}$ और $\sin B = \frac{15}{17}$ तो $\sin(A+B)$ और $\sin(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ और $\sin B = \frac{4}{5}$ तो $\sin(A+B)$ और $\sin(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ तथा $\angle B = 45^\circ$ तो $\tan(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\cot A = \frac{11}{2}$, $\tan B = \frac{7}{24}$ तो $\cot(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित को विस्तारित करें:

   (i) $\sin(A+B+C)$ (ii) $\cos(A+B+C)$ (iii) $\tan(A+B+C)$

7. सिद्ध कीजिए कि:

   (i) $\tan(45^\circ + A) = \frac{1+\tan A}{1-\tan A}$

   (ii) $\tan(45^\circ - A) = \frac{1-\tan A}{1-\tan A}$

   (iii) $\sin(A+45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin A + \cos A)$

   (iv) $\sin(30^\circ - A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sqrt{3}\cos A)$

   (v) $\cos(45^\circ + A) + \sin(A - 45^\circ) = 0$

   (vi) $\cos(A+B) + \sin(A-B) = (\cos A + \sin A)(\cos B - \sin B)$

(vii) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right).\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=1$

(viii) $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)}=\cos ec2A$

8. सिद्ध कीजिए कि:

(i) $\frac{\tan 4A-\tan 3A}{1+\tan 4A.\tan 3A}=\tan A$

(ii) $2\sin(A+45^0).\sin(A-45^0)=\sin^2 A-\cos^2 A$

(iii) $\cos(30^0+A).\cos(30^0-A)-\sin(30^0+A).\sin(30^0-A)=\frac{1}{2}$

(iv) $\sin(60^0-A).\cos(30^0+A)+\cos(60^0-A).\sin(30^0+A)=1$

(v) $\frac{\cot(\alpha+\beta).\cot\alpha+1}{\cot\alpha-\cos(\alpha+\beta)}=\cot\beta$

(vi) $\cot^2 A+\tan A=\cos ec2A$

(vii) $\cos 4\theta.\cos\theta+\sin 4\theta.\sin\theta=\cos 2\theta.\cos\theta-\sin 2\theta.\sin\theta$

(viii) $\tan 5A-\tan 3A-\tan 2A=\tan 5A.\tan 3A.\tan 2A$

(ix) $\sin(n+1)\theta.\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta.\sin(n-1)\theta=\sin 2\theta$

9. सिद्ध कीजिए कि-

(i) $\sin(A+B).\sin(A-B)+\sin(B+C).\sin(B-C)+\sin(C+A).\sin(C-A)=0$

(ii) $\sin A.\sin(B-C)+\sin B.\sin(C-A)+\sin C.\sin(A-B)=0$

(iii) $\frac{\sin(B-C)}{\cos B.\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C.\cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A.\cos B}=0$

(iv) $\tan 40^0+\tan 5^0+\tan 40^0.\tan 5^0=1$

(v) $\cot 27^0 + \cot 32^0 + \cot 31^0 = \cot 27^0 . \cot 32^0 . \cot 31^0$

(vi) $\sqrt{3} + \tan 40^0 + \tan 80^0 = \sqrt{3} \tan 40^0 . \tan 80^0$

10. यदि $A + B = \frac{\pi}{4}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$

11. निम्नलिखित का न्यूनतम एवं महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\sqrt{3} \sin\theta - \cos\theta$

(ii) $7\cos\theta + 24\sin\theta$

12. यदि $\tan\alpha = \frac{1}{2}, \tan\beta = \frac{1}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$

1.4 अनुपरिवर्तन सूत्र

प्रस्तावना: योग एवं गुणनफल से संबंधित सूत्र जिसे $A \pm B$ से हल कर सकते हैं-

सूत्र:

1. $2\sin A.\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
2. $2\cos A.\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
3. $2\cos A.\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
4. $2\sin A.\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
5. $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$
6. $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}$
7. $\cos C + \cos D = \cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$
8. $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{D-C}{2} = -2\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}$

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$$

हल:-

$\because \sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$ .....(1)

पुन:$\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$ .....(2)

(1)+(2) से

$\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A.\cos B$ .....(3)

मान लिया कि-

$$A+B=C$$

$$A-B=D$$

जोड़ने पर- $2A=C+D$

$$A=\frac{C+D}{2}$$

घटाने पर- $2B=C-D$

$$B=\frac{C-D}{2}$$

(3) में मान रखने पर-

$$\sin C+\sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}$$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिए कि-

$$\frac{\sin 4A+\sin 10A-\sin 2A}{\cos 4A+\cos 10A+\cos 2A} = \tan 4A$$

हल:- बायाँ पक्ष $= \dfrac{\sin 4A+\sin 10A-\sin 2A}{\cos 4A+\cos 10A+\cos 2A}$

$$= \frac{\sin 4A+2\cos\frac{10A+2A}{2}.\sin\frac{10A-2A}{2}}{\cos 4A+2\cos\frac{10A+2A}{2}.\cos\frac{10A-2A}{2}}$$

$$= \frac{\sin 4A(1+2\cos 6A)}{\cos 4A(1+2\cos 6A)} = \tan 4A = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 3.सिद्ध कीजिए कि-

$$\sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 60^\circ.\sin 80^\circ = \frac{3}{16}$$

बायाँ पक्ष $= \sin 20^\circ.\sin 40^\circ.\sin 60^\circ.\sin 80^\circ$

$= \sin 60^\circ.\sin 80^\circ.\sin 40^\circ.\sin 20^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}2\sin 80^\circ.\sin 40^\circ\right)\times \sin 20^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sin 80^\circ.\sin 40^\circ)\times \sin 20^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\cos(80^\circ - 40^\circ) - \cos(80^\circ + 40^\circ)\}\times \sin 20^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\cos 40^\circ - \cos 120^\circ\}\sin 20^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\{\cos 40^\circ.\sin 20^\circ - \cos 120^\circ.\sin 20^\circ\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}\times 2\cos 40^\circ.\sin 20^\circ - \cos 120^\circ.\sin 20^\circ\right\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ) - (-\frac{1}{2})\sin 20^\circ\right\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}\sin 60^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ + \frac{1}{2})\sin 20^\circ\right\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{1}{2}\sin 60^\circ\right\}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3}{16} =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 4. $\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n + \left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$

$= 2\cot^n\frac{A-B}{2}$ जहाँ n, समपूर्णांक है।

$= 0$ जहाँ n, विषमपूर्णांक है।

हलः- बायाँ पक्ष- $\left(\frac{\cos A+\cos B}{\sin A-\sin B}\right)^n+\left(\frac{\sin A+\sin B}{\cos A-\cos B}\right)^n$

$$=\left\{\frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}\right\}^n+\left\{\frac{2\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{B-A}{2}}\right\}^2$$

$$=\left(\cot\frac{A-B}{2}\right)^2+\left(-\cot\frac{A-B}{2}\right)^2$$

$$=\cot^n\frac{A-B}{2}+(-1)^n\cot^n\frac{A-B}{2}$$

माना कि $n=$ सम पूर्णांक

तब $(-1)^n=1$

$$=\cot^n\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cot^2\frac{A-B}{2}=2\cot^n\frac{A-B}{2}$$

माना कि $n=$ विषम पूर्णांक

तब $(-1)^2=-1$ तब बायाँ पक्ष $=\cot^2\frac{A-B}{2}-\cot^n\frac{A-B}{2}=0$

प्रश्नावली-5

सिद्ध करें कि-

1. $\sin 40^0+\sin 20^0=\cos 10^0$
2. $\sin 60^0+\cos 20^0=2\sin 65^0.\sin 85^0$
3. $\sin 80^0-\sin 20^0=\cos 50^0$
4. $\sin 50^0+\sin 10^0=\sin 70^0$
5. $\cos 55^0+\cos 65^0+\cos 175^0=0$
6. $\cos 43^0+\cos 77^0=\cos 17^0$

7. $\cos(A+B).\cos(A-B)=\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)$

8. $\frac{\sin 9A-\sin 7A}{\cos 7A-\cos 9A}=\cot 8A$

9. $\frac{\sin(4A-2B)+\sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B)+\cos(4B-2A)}=\tan(A+B)$

10. $\frac{\cos\theta-\cos 3\theta}{\sin 3\theta-\sin\theta}=\tan 2\theta$

11. $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta}{\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta}=\tan 2\theta$

12. $\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}=\tan 4A$

13. $\frac{\sin 3\theta+\sin 5\theta+\sin 7\theta+\sin 9\theta}{\cos 3\theta+\cos 5\theta+\cos 7\theta+\cos 9\theta}=\tan 6\theta$

14. $\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cos 8\theta=4\cos\theta.\cos 2\theta.\cos 5\theta$

15. $\cos A+\cos B+\cos C+\cos(A+B+C)$

$$=4\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{C+A}{2}.\cos\frac{A+B}{2}$$

16. $\cos(\theta-120^\circ)+\cos(\theta+120^\circ)+\cos\theta=0$

17. $\sin(\theta-120^\circ)+\sin(\theta+120^\circ)+\sin\theta=0$

18. $\sin(60^\circ+\theta)+\sin(60^\circ-\theta)=\sqrt{3}\cos\theta$

19. $\sin(45^\circ+\theta)+\sin(45^\circ-\theta)=\sqrt{2}\cos\theta$

20. (i) $\cos 10^\circ.\cos 30^\circ.\cos 50^\circ.\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$

(ii) $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 60^\circ.\cos 80^\circ=\frac{1}{16}$

(iii) $\sin 20^\circ.\sin 30^\circ.\sin 40^\circ.\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{16}$

(iv) $\tan 20^0 . \tan 40^0 . \tan 80^0 = \sqrt{3}$

21. $\cos 18^0 - \sin 18^0 = \sqrt{2} \sin 27^0$

22. $\dfrac{\cos 10^0 - \sin 10^0}{\cos 10^0 + \sin 10^0} = \tan 35^0$

23. $\cos A + \cos B = a$ तथा $\sin A + \sin B = b$ तो सिद्ध कीजिए कि-

$$\tan \frac{A+B}{2} = \frac{b}{a}$$

24. $\operatorname{cosec} A + \sec A = \operatorname{cosec} B + \sec B$ तो $\tan A . \tan B . = \cot \dfrac{A+B}{2}$ सिद्ध कीजिए।

25. $\sin \theta = n \sin(\theta + 2\alpha)$ तो $\tan(\theta + \alpha) = \dfrac{1+n}{1-n} \tan \alpha$ सिद्ध कीजिए।

1.5 अपवर्त्य कोण (Multiple angle)

प्रस्तावना:

कोण nA (जहाँ $n=2,3,4.....$) को कोण A का अपवर्त्य कोण कहते हैं। हम यहाँ अपने को मुख्यत: n=2 और 3 पर सीमित रखेंगे।

आप जान चुके हैं कि–

$$\sin(A+B)=\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cdot\cos B-\sin A\cdot\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$$

अब मान लें कि $B=A$

$\therefore \quad \sin(A+A)=\sin A\cdot\cos A+\cos A\cdot\sin A$

या, $\quad \sin 2A=2\sin A\cdot\cos A$

इसी तरह $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$

$$=2\cos^2 A-1$$

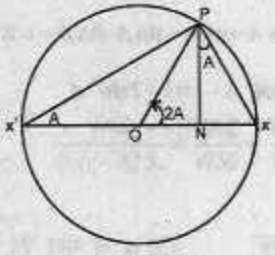
$$=1-2\sin^2 A$$

तथा $\quad \tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$(A+B)$ का सूत्र A तथा B के किसी भी मान के लिए सत्य है, अत: $2A$ वाला सूत्र भी A के किसी भी मान के लिए सत्य होगा।

अब हम $2A$ सूत्र को स्वतंत्र रूप से ज्यामितीय विधि द्वारा स्थापित करेंगे। यहाँ हम सुविधा के लिए $2A$ का मान $90°$ से कम रखेंगे।

$2A$ कोण को त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ ज्ञात करना जहाँ $2A<90°$



आकृति-9

मान लें कि O केन्द्र तथा XOX' व्यास वाला XPX' एक वृत्त है। वृत्त के केन्द्र O पर $\angle XOP = 24°$ का कोण बना है (जहाँ $24 < 90°$)

PX, PX' को मिलाकर, P से PN लम्ब XX' पर डालें।

अब $\angle XX'P = \frac{\angle XOP}{2} = A$ (क्यों?)

$\because$ $\angle XPX' = 90°$ (अर्द्धवृत्त का कोण)

$\therefore$ $\angle X'XP = 90° - A$

$\because$ $\angle PNX = 90°$; $\therefore$ $\angle XPN = A$

अब समकोण ΔPON में,

$$\sin 2A = \frac{PN}{OP} = \frac{2PN}{2OP}$$

$$= \frac{2PN}{XX'} \qquad (OP = \text{अर्धव्यास})$$

$$= \frac{2PN}{XX'} \times \frac{PX'}{XX'} = 2\sin A \cdot \cos A$$

पुन: $$\cos 2A = \frac{ON}{OP} = \frac{2ON}{2OP} = \frac{ON + ON}{XX'}$$

$$= \frac{(X'N - OX') + (OX - NX)}{XX'} = \frac{X'N - NX}{XX'}$$

$$= \frac{X'N}{XX'} - \frac{NX}{XX'}$$

$$= \frac{X'N}{PX'} \times \frac{PX'}{XX'} - \frac{NX}{PX} \times \frac{PX}{XX'}$$

$$= \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$$

पुन: $$\tan 2A = \frac{PN}{ON} = \frac{2PN}{2ON} = \frac{2PN}{X'N - NX}$$

$$= \frac{\frac{2PN}{X'N}}{\frac{X'N}{X'N} - \frac{NX}{X'N}} \qquad (X'N \text{ से भाग देने पर})$$

$$= \frac{\frac{2PN}{X'N}}{1 - \frac{NX}{PN} \times \frac{PN}{X'N}} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

यहाँ सूत्र की स्थापना में $2A \angle 90°$ माना गया है। छात्रों को समझना चाहिए कि ये सूत्र $2A$ या A के किसी भी मान के लिए सत्य है।

उदाहरण:सिद्ध करें-

(i) $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

हल:- (i) बायाँ पक्ष $= \sin 2A$

$$= 2\sin A \cdot \cos A$$

$$= \frac{2\sin A \cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\frac{2\sin A \cdot \cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

($\cos^2 A$ से भाग देने पर जहाँ $A \neq 90°$)

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

(ii) बायाँ पक्ष $= \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

($\cos^2 A$ से भाग देने पर जहाँ $A \neq 90°$)

$$= \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

उपरोक्त दोनों संबंध आगे सूत्र का कार्य करेगा।

3A कोण का सूत्र ज्ञात करना:

अब हम 2A तथा (A+B) सूत्र की मदद से 3A का A के रूप में सूत्र ज्ञात करेंगे।

(i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(iii) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

हल:

(i) $\sin 3A = \sin(2A + A)$

$= \sin 2A \cdot \cos A + \cos 2A \cdot \sin A$

$= 2\sin A \cdot \cos A \cdot \cos A + (1 - 2\sin^2 A) \cdot \sin A$

(sin 2A तथा cos 2A का मान बैठाने पर)

$= 2\sin A \cdot \cos^2 A + \sin A(1 - 2\sin^2 A)$

$= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A(1 - 2\sin^2 A)$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = \cos(2A + A)$

$= \cos 2A \cdot \cos A - \sin 2A \cdot \sin A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cdot \cos A \cdot sonA$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cdot \cos A$

$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2(1 - \cos^2 A)\cos A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

(iii) $\tan 3A = \tan(2A + A)$

$= \dfrac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \cdot \tan A}$

$= \dfrac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \times \tan A}$

$$= \frac{2\tan A + \tan A(1-\tan^2 A)}{(1-3\tan^2 - 2\tan^2 A)}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

उपरोक्त सूत्र को $(A+B+C)$ के सूत्र से भी ज्ञात कर सकते हैं।

$\because$ $\sin(A+B+C) = \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \cos A \cdot \cos C$

$$+\sin C \cdot \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$\cos(A+B+C) = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A$$

$$-\sin A \cdot \sin C \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$$

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}{1 - \tan A \cdot \tan B - \tan B \cdot \tan C - \tan C \cdot \tan A}$$

अब इन सूत्रों में $B = C = A$ रखने पर,

$$\sin 3A = \sin A \cdot \cos^2 A + \sin A \cdot \cos^2 A + \sin A \cdot \cos^2 A - \sin^3 A$$

$$= 3\sin A(1-\sin^2 A) - \sin^3 A$$

$$= 3\sin A - 4\sin^3 A$$

इसी प्रकार, $\cos 3A = \cos^3 A - \sin^2 A \cdot \cos A - \sin^2 A \cdot \cos A - \sin^2 A \cdot \cos^2 A$

$$= \cos^3 A - 3\sin^2 A \cdot \cos A$$

$$= \cos^3 A - 3(1-\cos^2 A)\cos A$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A$$

तथा $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

प्रमुख-सूत्र

(i) $\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(iv) $1+\cos 2A = 2\cos^2 A$

(v) $1-\cos 2A = 2\sin^2 A$

(vi) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(vii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(viii) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

उदाहरण: 2 यदि $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$ (जहाँ $\alpha < 90°$) तो $\sin 2\alpha$ का मान बतावें।

हल: $\because \quad \sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

$\therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$ ($\because \cos\alpha$ धनात्मक है।)

$= \dfrac{3}{5}$

अब $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$= 2 \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$

उपरोक्त प्रश्न में $\alpha < 90°$ अतः $\cos\alpha$ का धनात्मक मान लिया गया है। यदि α में शर्त नहीं रहता, $\cos\alpha$ का धनात्मक तथा ऋणात्मक दोनों मान संभव है। हम यहाँ सुविधा के लिए सिर्फ धनात्मक मान लेंगे।

उदाहरण: 3 सिद्ध करें कि-

$$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$$

हल: बायाँ पक्ष $=\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$

$$=\frac{\sin\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta}{2\cos^2\theta+\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}$$

$$=\tan\theta$$

उदाहरण: 4 मान बतावें-

(i) $\sin 18°$ (ii) $\cos 18°$

(iii) $\cos 36°$ (iv) $\sin 36°$

(v) $\sin 22\frac{1°}{2}$ (vi) $\cos 22\frac{1°}{2}$

(vii) $\tan 22\frac{1°}{2}$

हल: (i) मान लें कि-

$A=18°$

या, $5A=90°$

या, $2A=90°-3A$

या, $\sin 2A=\sin(90°-3A)=\cos 3A$

या, $2\sin A\cdot\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$

या, $2\sin A=4\cos^2 A-3$

($\because \cos A=\cos 18°\neq$, $\therefore$ cos से भाग देने पर)

या, $2\sin A=4(1-\sin^2 A)-3$

या, $4\sin^2 A+2\sin A-1=0$

या, $\sin A=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4\cdot 4(-1)}}{2\times 4}$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \text{या;} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$\because \sin A = \sin 18°$ का मान धनात्मक है,

$\therefore$ ऋणात्मक मान को छोड़ते हुए,

$$\sin A = \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$= \cos 72° \quad \text{(क्यों?)}$$

(ii) $\cos 18° = +\sqrt{1-\sin^2 18°}$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16-(5+1-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \sin 72° \quad \text{(क्यों?)}$$

(iii) $\cos 36° = \cos 2(18°)$

$$= 1 - 2\sin^2 18°$$

अब $\sin 18°$ का मान रखने पर,

$$\cos 36° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$= \frac{8-6+2\sqrt{5}}{8} = \frac{2+2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54° \quad \text{(क्यों?)}$$

(iv) $\sin 36° = +\sqrt{1-\cos^2 36°}$ ($\because \sin 36°$ का मान धनात्मक है।)

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16-(5+1+2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

$$= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$= \cos 54^\circ \quad \text{(क्यों?)}$$

(v) $2\sin^2 22\frac{1^\circ}{2} = 1 - \cos 2 \times (22\frac{1^\circ}{2})$

$$= 1 - \cos 45^\circ = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

या, $\sin^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

या, $\sin 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ($\because \sin 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है)

(vi) $2\cos^2 22\frac{1^\circ}{2} = 1 + \cos 45^\circ$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

या, $\cos^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

या, $\cos 22\frac{1^\circ}{2} = +\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ ($\because \cos 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है)

(vii) $\tan^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{\sin^2 22\frac{1^\circ}{2}}{\cos^2 22\frac{1^\circ}{2}}$

$$= \frac{2\sin^2 22\frac{1^\circ}{2}}{2\cos^2 22\frac{1^\circ}{2}} = \frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1}$$

$\therefore \tan 22\frac{1^\circ}{2} = \sqrt{2}-1$

($\because \tan 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है।)

उदाहरण: 5 सिद्ध करें कि-

$$\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

हल: $\because \quad \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

या, $\cot 3A = \frac{1}{\tan 3A} = \frac{1-3\tan^2 A}{3\tan A - \tan^3 A}$

$$= \frac{1-\frac{3}{\cot^2 A}}{\frac{3}{\cot A} - \frac{1}{\cot^3 A}} = \frac{\frac{\cot^2 A - 3}{\cot^2 A}}{\frac{3\cot^2 A - 1}{\cot^3 A}}$$

$$= \frac{\cot^2 A - 3}{\cot^2 A} \times \frac{\cot^3 A}{3\cot^2 A - 1}$$

$$= \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$$

उदाहरण: 6 सिद्ध करें कि-

(i) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = 4$

(ii) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

(iii) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$

(iv) $\tan A \cdot \tan(60^\circ - A) \cdot \tan(60^\circ + A) = \tan 3A$

हल:

(i) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

$$= \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot cis 10^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ}{\frac{1}{2}\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\frac{1}{4} \times 2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ}{\frac{1}{4}\sin 20^\circ} = 4$$

(ii) $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \cdot \sin(60^\circ - 20^\circ) \cdot \sin(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \{\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ)\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \left\{\frac{3}{4} - \sin^2 20^\circ\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\frac{3\sin 20° - 4\sin^3 20°}{4}\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 3\times 20°}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60° = \frac{3}{16}$$

(iii) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80°$

$$= \frac{1}{2}\cos 20°\{\cos 40° \cdot \cos 80°\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20°\{\cos(60° - 20°) \cdot \cos(60° + 20°)\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20°\left\{\cos^2 60° - \sin^2 20°\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20°\left\{\frac{1}{4} - 1 + \cos^2 20°\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 20°\left\{\cos^2 20° - \frac{3}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4\cos^3 20° - 3\cos 20°}{4}$$

$$= \frac{1}{8} \times \cos 60° = \frac{1}{16}$$

(iv) $\tan A \cdot \tan(60° - A) \cdot \tan(60 + A)$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin(60° - A)}{\cos(60° - A)} \cdot \frac{\sin(60° + A)}{\cos(60° + A)}$$

$$= \frac{\sin A(\sin^2 60° - \sin^2 A)}{\cos A(\cos^2 60° - \sin^2 A)}$$

$$= \frac{\sin A\left(\frac{3}{4} - \sin^2 A\right)}{\cos A\left(\frac{1}{4} - 1 + \cos^2 A\right)}$$

$$= \frac{\frac{3\sin A - 4\sin^3 A}{4}}{\frac{4\cos^3 A - 3\cos A}{4}}$$

$$= \frac{\sin 3A}{\cos 3A} = \tan 3A$$

उदाहरण 7 यदि $A = \frac{\pi}{13}$, हो तो सिद्ध करें कि-

$$\cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A \cdot \cos 4A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A = \frac{1}{64}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A \cdot \cos 4A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A$

$$= \frac{2\sin A \cdot \cos A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A \cdot \cos 4A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A}{2\sin A}$$

($\because \sin A \neq 0, \therefore 2\sin A$ से गुणा तथा भाग करने पर)

$$= \frac{\sin 2A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A \cdot \cos 4A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A}{2\sin A}$$

$$= \frac{2\sin 2A \cdot \cos 2A \cdot \cos 3A \cdot \cos 4A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A}{4\sin A}$$

$$= \frac{\sin 4A \cdot \cos 4A \cdot \cos 3A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A}{4\sin A}$$

$$= \frac{2\sin 4A \cdot \cos 4A \cdot \cos 3A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A}{8\sin A}$$

$$= \frac{\sin 8A \cdot \cos 3A \cdot \cos 5A \cdot \cos 6A}{8\sin A}$$

($\because 13A = \pi, \therefore 8A = \pi - 5A$ या, $\sin 8A = \sin 5A$)

$$= \frac{\sin 5A \cdot \cos 5A \cdot \cos 3A \cdot \cos 6A}{8\sin A}$$

$$= \frac{\sin 10A \cdot \cos 3A \cdot \cos 6A}{16\sin A}$$

$$= \frac{\sin 3A \cdot \cos 3A \cdot \cos 6A}{16\sin A}$$

($\because \sin 10A = \sin 3A$)

$$= \frac{\sin 6A \cdot \cos 6A}{32 \sin A}$$

$$= \frac{\sin 12A}{64 \sin A}$$

$$= \frac{1}{64} \quad (\because \sin 12A = \sin A)$$

= दायाँ पक्ष सिद्ध हुआ।

उदाहरण: 8 सिद्ध करें कि-

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{1+\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = 0$$

हल: बायाँ पक्ष $= \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{2\cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$

$$= 2\cos \alpha - 2\cos \alpha$$

$$= 0$$

उदाहरण: 9 सिद्ध करें कि-

$$\sin 5\theta = 16\sin^5 \theta - 20\sin^3 \theta + \sin \theta$$

हल: प्रथम विधि:

$$\sin 5\theta = \sin(3\theta + 2\theta)$$

$$= \sin 3\theta \cdot \cos 2\theta + \cos 3\theta \cdot \sin 2\theta$$

$$= (3\sin \theta - 4\sin^3 \theta)(1 - 2\sin^2 \theta) + (4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) \cdot 2\sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$= (3\sin \theta - 6\sin^3 \theta - 4\sin^3 \theta + 2\sin \theta \cdot \cos^2 \theta (4\cos^2 - 3)$$

$$= (3\sin \theta - 10\sin^3 \theta + 8\sin^5 \theta) + 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta)\{4(1 - \sin^2 \theta) - 3\}$$

$$= (3\sin \theta - 10\sin^3 \theta + 8\sin^5 \theta) + (2\sin \theta - 8\sin^3 \theta - 2\sin^3 \theta + 8\sin^5 \theta)$$

$$= 16\sin^5 \theta - 20\sin^3 \theta + 5\sin \theta$$

द्वितीय विधि:

$$\sin 5\theta+\sin\theta=2\sin\frac{5\theta+\theta}{2}\cdot\cos\frac{5\theta-\theta}{2}$$

$$=2\sin 3\theta\cdot\cos 2\theta$$

$$=2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)(1-2\sin^2\theta)$$

$$=2(3\sin\theta-6\sin^3\theta-4\sin^3\theta+8\sin^5\theta)$$

$$=6\sin\theta-20\sin^3\theta+16\sin^5\theta$$

$$\therefore \sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$$

उदाहरण: 10 यदि समीकरण $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=c$ के दो असमान मूल α तथा β हो, तो सिद्ध करें कि-

(i) $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{2b}{c+a}$

(ii) $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{c-a}{c+a}$

हल: दिए हुए समीकरण $a\cos 2\theta+b\sin 2\theta=c$ में,

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$a\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)+b\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)=c$$

या, $(a+c)\tan^2\theta-2b\tan\theta+(c-a)=0$

यह $\tan\theta$ में एक द्विघात समीकरण है,

$\therefore$ इसके दो मूल $\tan\alpha$ एवं $\tan\beta$ होंगे।

$$\therefore \tan\alpha+\tan\beta=\frac{2b}{c+a}$$

एवं $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{c-a}{c+a}$

प्रश्नावली-6

1. यदि $\sin\alpha = \frac{12}{13}(\alpha < 90°)$ तो $\sin 2\alpha$ का मान बतावें।

2. यदि $\tan\alpha = \frac{16}{63}$ तो $\cos 2\alpha$ का मान बतावें।

3. यदि $\tan\theta = \frac{b}{a}$ तो $a\cos 2\theta + b\sin 2\theta$ का मान बतावें।

4. यदि $\sin A = 0{\cdot}1$ तो $\sin 3A$ का मान बतावें।

5. यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ तो $\cos 3A$ का मान बतावें।

6. सिद्ध करें कि-

(i) $1 + \tan A \cdot \tan 2A = \sec 2A$

(ii) $\cot\theta - \tan\theta = 2\cot 2\theta$

(iii) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

(iv) $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} = \tan^2 A$

(v) $\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cot A$

(vi) $\frac{1+\tan^2(45°-\theta)}{1-\tan^2(45°-\theta)} = \cos ec 2\theta$

(vii) $\frac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A} - \frac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A} = 2\tan 2A$

(viii) $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

(ix) $\sin 8\theta = 8\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\cos 2\theta\cdot\cos 4\theta$

(x) $\sin A\cdot\sin(60°-A)\cdot\sin(60°+A) = \frac{1}{4}\sin 3A$

(xi) $\cos A\cdot\cos(60°-A)\cdot\cos(60°+A) = \frac{1}{4}\cos 3A$

(xii) $\tan 15° + \cot 15° = 4$

(xiii) $\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta-\sin^3\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}\sin 4\theta$

(xiv) $4(\cos^3 10°+\sin^3 20°)=3(\cos 10+\sin 20°)$

(xv) $\cos^3 A\cdot\cos 3A+\sin^3 A\cdot\sin 3A=\cos^3 2A$

(xvi) $\cos^3 A\cdot\sin 3A+\sin^3 A\cdot\cos 3A=\frac{3}{4}\sin 4A$

(xvii) $\cos\frac{2\pi}{15}\cdot\cos\frac{4\pi}{15}\cdot\cos\frac{8\pi}{15}\cdot\cos\frac{14\pi}{15}=\frac{1}{16}$

(xviii) $\cos\theta\cdot\cos 2\theta\cdot\cos 3\theta\cdot\cos 4\theta\cdot\cos 5\theta=\frac{1}{32}\quad\left(\text{जहाँ}\theta=\frac{\pi}{11}\right)$

(xix) $\frac{\cot A}{\cot A-\cot 3A}+\frac{\tan A}{\tan A-\tan 3A}=1$

(xx) $\frac{1}{\tan 3A+\tan A}-\frac{1}{\cot 3A+\cot A}=\cot 4A$

(xxi) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=4\cos 2\alpha$

(xxii) $\cot\theta\cdot\cot(60°+\theta)\cdot\cot(60°-\theta)=\cot 3\theta$

(xxiii) $8\cos^3 40°=6\cos 40°-1$

7. यदि $\cos A+\cos B+\cos C=0$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=12\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$$

(यदि $a+b+c=0$ तो $a^3+b^3+c^3=3abc$ की मदद लें)

8. यदि $\tan\theta=\sec 2\alpha$ तो सिद्ध करें कि-

$$\sin 2\theta=\frac{1-\tan^4\alpha}{1+\tan^4\alpha}$$

9. सिद्ध करें कि-

$$(\cos 4\theta-\cos 4\alpha)=8(\cos\theta-\cos\alpha)(\cos\theta+\cos\alpha)$$
$$(\cos\theta-\sin\alpha)(\cos\theta+\sin\alpha)$$

—

1.6 अपवर्तक कोण (Sub-multiple angles)

प्रस्तावना:

कोण nA (जहाँ $n=\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{3}$ या $\frac{1}{4}$....)को कोण A का अपवर्तक (Sub-mulipie angles) कहते हैं। इस अध्याय में कोण A की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को मुख्यत: कोण $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}$, कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ के पदों में व्यक्त करेंगे।

कोण A की त्रिकोणमितीय निष्पतियों को कोण $\frac{A}{2}$ की त्रिकोणमितीय निष्पतियों में व्यक्त करना (To express the trigonometrical ratios of angle A interms of trigonometrical ratios of angle $\frac{A}{2}$):

सिद्ध करें कि-

(i) $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$

$$=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(ii) $\cos A = \cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(iii) $\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

हल: (i) आप जानते हैं कि-

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

मान लें कि $2\theta = A$

$\therefore \quad \theta = \frac{A}{2}$

2θ तथा θ के मान को रखने पर,

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$$= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

मान लें कि $2\theta = A, \quad \therefore \quad \theta = \frac{A}{2}$

2θ तथा θ का मान उपरोक्त सर्वसमिका (तादात्म्य) में रखने पर,

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

(iii) इसी प्रकार $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ से आप सिद्ध कर सकते हैं कि-

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

उदाहरण:1 सिद्ध करें कि-

(i) $1+\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$

(ii) $1-\cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$

हल: (i) $1+\cos A = A + 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

$= 2\cos^2\frac{A}{2}$

(ii) $1-\cos A = A-\left(1-2\sin^2\frac{A}{2}\right)$

$= 2\sin^2\frac{A}{2}$

उदाहरण:2 $\cos A$ के मान से $\sin\frac{A}{2}$ तथा $\cos\frac{A}{2}$ का मान ज्ञात करना:

हल: $\because \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = 1+\cos A$

or $\quad \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \quad \text{.....(i)}$

पुन: $\quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A$

या, $\quad \sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad \text{.....(ii)}$

यहाँ $\sin\frac{A}{2}$ तथा $\cos\frac{A}{2}$ के मान के चिह्न में संशयात्मक(Ambiguous)स्थिति है।

जब A का खास मान दिया रहेगा तब हम आसानी से ज्ञात जाएंगे कि $\frac{A}{2}$ किस पाद में होगा और उसी के अनुरूप $\sin\frac{A}{2}$ या $\cos\frac{A}{2}$ के मान में उचित चिह्न (sign) का उपयोग करेंगे।

उदाहरण: 3 $\sin\frac{A}{2}\pm\cos\frac{A}{2}$ के चिह्न को ज्ञात करना

$$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2} = \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{A}{2}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\cos 45^\circ\cdot\sin\frac{A}{2}+\sin 45^\circ\cdot\cos\frac{A}{2}\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)\right\}$$

$\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}$ का चिह्न वही होगा जो $\sqrt{2}\left\{\sin\left(\frac{A}{2}+45°\right)\right\}$ का चिह्न होगा।

$\sqrt{2}$ एक धनात्मक अपरिमेय संख्या है अत: चिह्न का निर्धारण $\sin\left(\frac{A}{2}+45°\right)$ निर्भर करेगा।

$\sin\left(\frac{A}{2}+45°\right)$ का मान धनात्मक तभी होगा, जब कोण **का मान 0° से 180°** च हो।

[किसी भी कोण 0° से 360° के बीच (धनात्मक या ऋणात्मक कोण में)बदला कता है। अत: हम अपने अध्ययन को यहाँ इसी के बीच सीमित रखते हैं।]

अर्थात् $\sin\left(\frac{A}{2}+45°\right)\geq\sin 0°$

$\sin\left(\frac{A}{2}+45°\right)\leq\sin 180°$

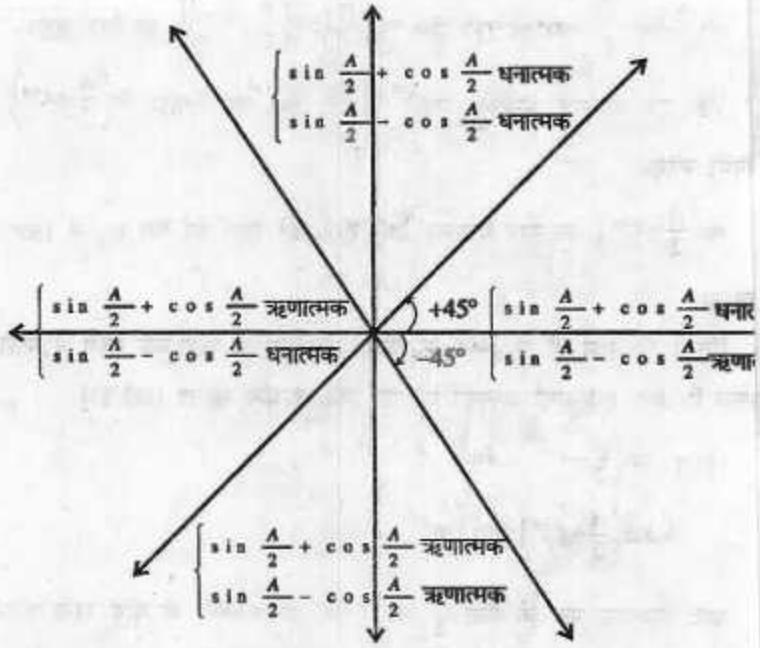
अत: धनात्मक मान के लिए $\frac{A}{2}$ को $-45°$ से $+135°$ के बीच रहना होगा था मान ऋणात्मक होंगे।

इसी प्रकार हम दिखला **सकते हैं** कि-

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}-45°\right)$$

इस धनात्मक होने के लिए $\frac{A}{2}$ को 45° से 225° के बीच रहना होगा अन्यथा ऋणात्मक होंगे।

इन निष्कर्षों को हम निम्न आलेख से समझ सकते हैं:



उदाहरण: 4 कोण A की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों को कोण $\frac{A}{3}$ की त्रिकोण निष्पत्तियों में व्यक्त करना:

सिद्ध करें कि-

(i) $\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$

(ii) $\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$

(iii) $\tan A = \dfrac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}}$

हल: (i) $\because \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

मान लें कि $3\theta = A$

$\therefore \theta = \frac{A}{3}$

3θ तथा θ का मान रखने पर,

$$\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$$

इसी प्रकार $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ तथा

$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3}{1 - 3\tan^2\theta}$ की मदद से

(ii) तथा (iii) को सिद्ध करें।

प्रमुख सूत्र

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$\tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$$

$$\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$$

$$\tan A = \frac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1-3\tan^2\frac{A}{3}}$$

उदाहरण: 5 $\sin 15°$ तथा $\cos 15°$ का मान ज्ञात करें।

हल: $\because \quad 2\sin\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

मानें कि $\frac{A}{2} = 15°$

$\therefore \quad A = 30°$

अब $\quad 2\sin^2 15° = 1 - \cos 30°$

या, $\quad \sin^2 15° = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

या, $\quad \sin 15° = \frac{\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\pm\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$

$$= \frac{\pm\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

पुन: $\quad \cos 15° = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}} = \frac{\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$$= \frac{\pm\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\because$ 15° प्रथम पाद में है। अत: $\sin 15°$ तथा $\cos 15°$ के मान धनात्मक होंगे। अत: ऋणात्मक चिह्न को अमान्य करते हुए-

$$\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

द्वितीय विधि-

$$\because \sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \pm\sqrt{1+\sin A} \qquad \text{.....(i)}$$

और $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{1-\sin A}$ .....(ii)

मान लें कि $A = 30°$

$\therefore \quad \sin 15° + \cos 15° = \pm\sqrt{1+\sin 30°} = \pm\sqrt{1+\frac{1}{2}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\because$ $\sin 15°$ तथा $\cos 15°$ धनात्मक है।

$\therefore \quad \sin 15° + \cos 15° = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ .....(iii)

पुनः $\sin 15° - \cos 15° = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\because \quad \sin 15° < \cos 15°$

$\therefore$ $\sin 15° - \cos 15°$ का मान ऋणात्मक होगा।

$\therefore \quad \sin 15° - \cos 15° = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ .....(iv)

अब $\sin 15° + \cos 15° = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\sin 15° - \cos 15° = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

दोनों को जोड़ने पर, $2\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

या, $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

प्रथम में दूसरे को घटाने पर,

$$2\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

या, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

विधि- $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

रण 6: जब $\theta = 310^\circ$ तब $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ का चिह्न बतावें।

$$\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$$
$$= \sin 155^\circ + \cos 155^\circ$$
$$= \sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 155^\circ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 155^\circ\right\}$$
$$= \sqrt{2}\{\sin 155^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 155^\circ \cdot \sin 45^\circ\}$$
$$= \sqrt{2}\{\sin(155^\circ + 45^\circ)\}$$
$$= \sqrt{2}\sin 200^\circ$$

200°, तृतीय पाद में है जिसमें $\sin\theta$, ऋणात्मक होता है।

$\therefore$ $\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}$ का चिह्न इस खास स्थिति में ऋणात्मक होगा।

रण 7: $\sin 22\frac{1^\circ}{2}$ का मान बतावें।

$\because$ $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$

मान लें कि $A = 45^\circ$

$\therefore$ $2\sin^2\frac{45^\circ}{2} = 1 - \cos 45^\circ$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

या, $\sin^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

या, $\sin 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

उदाहरण 8: सिद्ध करें कि

$$\cos A = \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$

हल: $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{1-\tan^2\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}}$$ ($\cos^2\frac{A}{2}$ से अंश तथा हर में भाग देने

उदाहरण 9: $\tan\frac{A}{2}$ को $\tan A$ के रूप में व्यक्त करें।

हल: $\because \quad \tan A = \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$

या, $1-\tan^2\frac{A}{2} = 2\tan\frac{A}{2} / \tan A$

या, $1 + \frac{1}{\tan^2 A} = \frac{1}{\tan^2 A} + 2\tan\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{\tan A} + \tan^2\frac{A}{2}$

या, $\frac{\tan^2 A + 1}{\tan^2 A} = \left(\frac{1}{\tan A} + \tan\frac{A}{2}\right)^2$

या, $\left(\frac{1}{\tan A} + \tan\frac{A}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$

या, $\tan\frac{A}{2} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A} - \frac{1}{\tan A}$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A} - 1}{\tan A}$$

उदाहरण 10: $\tan 15°$ तथा $\tan 7\frac{1°}{2}$ के रूप में व्यक्त करें।

हल: $\because \quad \tan\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$

मान लें कि $A = 30°$

$$\therefore \quad \tan 15° = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 30°}-1}{\tan 30°}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \pm\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \pm\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$

$$= \pm(2-\sqrt{3})$$

$\because$ $15°$ प्रथम पद में होता है।

$\therefore$ $15°$ का मान धनात्मक होगा।

$\therefore \quad \tan 15° = 2-\sqrt{3}$

पुनः: सूत्र से, $\tan\frac{A}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 A}-1}{\tan A}$

मानें कि $A = 15°$

$$\therefore \quad \tan 7\frac{1°}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\tan^2 15°}-1}{\tan 15°}$$

या, $$\tan 7\frac{1°}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{1+4+3-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{8-4\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\pm\frac{\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}-1}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\pm\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}}$$

$\because$ $\tan 7\frac{1^\circ}{2}$ का मान धनात्मक है। इसलिए ऋणात्मक चिह्न को अमान्य करते हुए-

$$\tan 7\frac{1^\circ}{2}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})-1}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{4-3}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{1}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{1}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

दूसरी विधि: हम जानते हैं कि $\tan\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$

मान लें कि $A=15^\circ$

$\therefore$ $\tan\frac{15^\circ}{2}=\frac{1-\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

$$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$ ($\sin 15^\circ$ तथा $\cos 15^\circ$ का मान बैठाने पर)

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}-4+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$=\frac{2(\sqrt{6}-2+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2}$$

$$=\sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{2}-1) - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$= (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

उदाहरण 11: सिद्ध करें कि

$$\frac{1-\cos A}{\sin A} = \tan\frac{A}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$$= \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2}$$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 12: सिद्ध करें कि

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \tan^2(45°+\frac{\theta}{2})$$

हल: बायाँ पक्ष $= \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$$= \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2}{(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2}$$

$$= \left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\tan\frac{\theta}{2}+1}{\tan\frac{\theta}{2}-1} \right)^2 = \left(\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\tan 45° + \tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan 45° \cdot \tan\frac{\theta}{2}} \right)^2 = \tan^2\left(45° + \frac{\theta}{2}\right)$$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण 13: सिद्ध करें कि

$$\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$$= \frac{(1-\cos\theta)+\sin\theta}{(1+\cos\theta)+\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

= दायाँ पक्ष

उदाहरण-14 सिद्ध करें कि-

$$\tan 6^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 66^\circ . \tan 78^\circ = 1$$

हल: बायाँ पक्ष $= \tan 6^\circ . \tan 42^\circ . \tan 66^\circ . \tan 78^\circ$

$$= \frac{\sin 6^\circ . \sin 42^\circ . \sin 66^\circ . \sin 78^\circ}{\cos 6^\circ . \cos 42^\circ . \cos 66^\circ . \cos 78^\circ}$$

$$= \frac{\{2\sin 66^\circ . \sin 6^\circ\}\{2\sin 78^\circ . \sin 42^\circ\}}{\{2\cos 66^\circ . \cos 6^\circ\}\{2\cos 78^\circ . \cos 42^\circ\}}$$

$$= \frac{\{\cos(66^\circ - 6^\circ) - \cos(66^\circ + 6^\circ)\}\{\cos(78^\circ - 42^\circ) - \cos(78^\circ + 42^\circ)\}}{\{\cos(66^\circ + 6^\circ) + \cos(66^\circ - 6^\circ)\}\{\cos(78^\circ - 42^\circ) + \cos(78^\circ + 42^\circ)\}}$$

$$= \frac{(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ)(\cos 36^\circ - \cos 120^\circ)}{(\cos 72^\circ + \cos 60^\circ)(\cos 120^\circ + \cos 36^\circ)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \sin 18^\circ\right)\left\{\cos 36^\circ - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}}{\left(\sin 18^\circ + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \cos 36^\circ\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2-\sqrt{5}+1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1+2}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}-1+2}{4}\right)\left(\frac{-2+\sqrt{5}+1}{4}\right)} = \frac{9-5}{5-1}$$

$= 1 =$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण-15 सिद्ध करें कि-

$$\cos\frac{A}{2^n}=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+....+\sqrt{2+2\cos A})}}\right\}}$$

(जहाँ करणी चिह्नों की संख्या n है)

हल: $\because \quad 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$

or, $\quad 4\cos^2\frac{A}{2}=2+2\cos A$

or, $\quad 2\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2+2\cos A}$ .....(i)

अब $A=\frac{A}{2},\frac{A}{2^2},\frac{A}{2^3}$ रखने पर

$$2\cos\frac{A}{2^2}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}}$$

$$2\cos\frac{A}{2^3}=\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2^2}}$$

$$=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos A}}}$$

.....

.....

इसी प्रकार बढ़ते हुए क्रम में हम लिख सकते हैं कि-

$$2\cos\frac{A}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+2\cos A}}}$$

$$\therefore\cos\frac{A}{2^n}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+2\cos A}}}}\right\}$$

द्वितीय विधि-

$$\text{दायाँ पक्ष}=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+2\cos A}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+2\cos\frac{A}{2}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2}}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+\sqrt{2+.....+2\cos\frac{A}{2^2}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2^2}}}\right\}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left\{2+\sqrt{2+.....+\sqrt{2+2\cos\frac{A}{2^3}}}\right\}}$$

∵ करणी चिह्न की संख्या प्रश्न में n है।

∴ $\text{दायाँ पक्ष}=\frac{1}{2}\times 2\cos\frac{A}{2^n}$

$$=\cos\frac{A}{2^n}=\text{ बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण-16

यदि $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{1}{6}$ तथा $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{8}$ हो, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{5}{48}$$

हल:

$$(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2(\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta)$$
$$=2\{1-\cos(\alpha-\beta)\}=4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

लेकिन $(\sin\alpha-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-\cos\beta)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$

या, $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{100}{64\times36}$

या, $4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{100}{64\times36}=\left(\frac{10}{48}\right)^2$

$\therefore$ $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{10}{48}$

या, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{5}{48}$

उदाहरण-17: यदि α और β, समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ के दो भिन्न हल हों, तो सिद्ध करें कि-

(i) $\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$

(ii) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

(iii) $\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

(iv) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$

हल:

प्रथम विधि:

$\because$ α,β समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ के दो हल हैं।

$\therefore$ $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ .....(i)

तथा $a\cos\beta+b\sin\beta=c$ .....(ii)

(i) में (ii) को घटाने पर,

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\sin\alpha-\sin\beta)=0$$

या, $$a2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+b.2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

या, $$2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}=0$$

$\because$ $\alpha\neq\beta$; $\quad\therefore\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\neq 0$

या, $$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$$

या, $$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\therefore$ $$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{b}{a}$$

अब $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

द्वितीय विधि:

दिये हुए समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ में,

$\cos q=\dfrac{1-\tan^2\dfrac{q}{2}}{1+\tan^2\dfrac{q}{2}}$ एवं $\sin\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$ रखने पर,

$$a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)+b\left(\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)=c$$

या, $(a+c)\tan^2\dfrac{\theta}{2}-2b\tan\dfrac{\theta}{2}+(c-a)=0$

या, $\tan\dfrac{\theta}{2}$ में एक द्विघात समीकरण है।

∴ इसके दो मूल $\tan\dfrac{\alpha}{2}$ एवं $\tan\dfrac{\beta}{2}$ होंगे।

∴ $\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{2b}{a+c}$

या, $\tan\dfrac{\alpha}{2}.\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{c-a}{a+c}$

$=\dfrac{c-a}{c+a}$

अब $\tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}}{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}.\tan\dfrac{\beta}{2}}$

∴ $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\dfrac{2b}{a+c}}{1-\dfrac{c-a}{a+c}}=\dfrac{b}{a}$

अब $$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{2\times\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}}$$

$$=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\frac{2\frac{b}{a}}{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

उदाहरण18: यदि α और β , समीकरण $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ के दो भिन्न हल हो, तो सिद्ध करें कि- $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

हल: $\because$ α,β समीकरण के हल हैं।

$\because$ $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$ .....(I)

तथा $a\cos\beta+b\sin\beta=c$ .....(II)

(I) में (I) को घटाने पर,

$a(\cos\alpha-\cos b)+(\sin\alpha-\sin\beta)$ होगा।

$$a(\cos\alpha-\cos\beta)+b(\cos\alpha-\cos\beta)=0$$

या, $$a.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}+b2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

या, $$2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\left\{a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}=0$$

$\because \quad \alpha\neq\beta;\therefore a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$

या, $$a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=b\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

या, $$\frac{a}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{b}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=k \quad \text{(माने)}$$

$$\therefore a=k\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ तथा } b=k\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

अब दायाँ पक्ष $$=\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2k\cos\frac{\alpha+\beta}{2}k\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\left(k^2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+k^2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{k^2.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{k^2\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$=\sin(\alpha+\beta)=\text{ बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 19: यदि $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\phi}{2}$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\theta=\frac{a\cos\phi+b}{a+b\cos\phi}$$

हल: $\because \quad \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\phi}{2}$

या, $$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{\phi}{2}$$

अब $$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\tan^2\frac{\phi}{2}}$$

$$= \frac{(a+b)-(a-b)\tan^2\frac{\phi}{2}}{a+b+(a-b)\tan^2\frac{\phi}{2}}$$

$$= \frac{a\left(1-\tan^2\frac{\phi}{2}\right)+b\left\{1+\tan^2\frac{\phi}{2}\right\}}{a\left(1-\tan^2\frac{\phi}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{\phi}{2}\right)}$$

अब हर तथा अंश में $\left(1+\tan^2\frac{\phi}{2}\right)$ से भाग देने पर,

$$= \frac{a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}\right)+b}{a+b\left(\frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}}\right)}$$

$$= \frac{a\cos\phi+b}{a+b\cos\phi} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 20: यदि $\cos\theta+\cos\phi=\frac{1}{3}$

और $\sin\theta+\sin\phi=\frac{1}{4}$, तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)=\pm\frac{5}{24}$$

हल: $\because \quad \cos\theta+\cos\phi=\frac{1}{3}$ .....(i)

$\sin\theta+\sin\phi=\frac{1}{4}$ .....(i)

$\therefore \quad (\cos\theta+\cos\phi)^2+(\sin\theta+\sin\phi)^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$

वा, $2+2\cos\theta.\cos\phi+2\sin\theta.\sin\phi=\frac{16+9}{144}$

वा, $2+2\cos(\theta-\phi)=\frac{25}{144}$

वा, $2\{1+\cos(\theta-\phi)\}=\frac{25}{144}$

वा, $2.2\cos^2\frac{\theta-\phi}{2}=\frac{25}{144}$

वा, $2\cos\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\frac{5}{12}$

वा, $\cos\frac{\theta-\phi}{2}=\pm\frac{5}{24}$

प्रश्नावली–7

1. $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}$ चिह्न बतावें जबकि (i) $\theta=200^0$ (ii) $\theta=100^0$

2. $\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}$ का चिह्न बतावें जबकि (i) $\theta=200^0$ (ii) $\theta=100^0$

3. $\cos 22\frac{1^0}{2}$ का मान ज्ञात करें।

सिद्ध करें कि–

4. $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\tan^2\frac{A}{2}$

5. $\frac{1+\cos A}{\sin A}=\cot\frac{A}{2}$

6. $\frac{\sin A}{1-\cos A}=\cot\frac{A}{2}$

7. $\frac{1-\sin A}{\cos A}=\tan\left(45^0-\frac{A}{2}\right)$

8. $\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{2}\left(1-\cot\frac{\theta}{2}\right)^2$

9. $\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}\times\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$

10. $\tan\frac{\theta}{2}+\cot\frac{\theta}{2}=2\cos ec\theta$

11. $\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{\theta}{2}=2\cot A$

12. $1+\tan A.\tan\frac{A}{2}=\sec A$

13. $\frac{\sin\theta+\sin\phi+\sin(\theta+\phi)}{\sin\theta+\sin\phi-\sin(\theta+\phi)}=\cot\frac{\theta}{2}.\cot\frac{\phi}{2}$

14. $\frac{1-\cos\theta+\cos\beta-\cos(\theta+\beta)}{1+\cos\theta-\cos\beta-\cos(\theta+\beta)}=\tan\frac{\theta}{2}.\cot\frac{\beta}{2}$

15. यदि $\sin\theta+\sin\phi=m$ और $\cos\theta+\cos\phi=n$ तो सिद्ध करें कि

$$\sin(\theta+\phi)=\frac{2mn}{m^2+n^2}$$

16. यदि $\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\phi}{2}$ तो सिद्ध करें कि $\cos\theta=\frac{\cos\phi+e}{1+e\cos\phi}$

17. सिद्ध करें कि– $\cot 6^0.\cot 42^0.\cot 66^0.\cot 78^0=1$

18. यदि $\sin\alpha+\sin\beta=a$ और $\cos\alpha+\cos\beta=b$ तो सिद्ध करें कि–

(i) $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(a^2+b^2-2)$

(ii) $\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$

(iii) $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

19. सिद्ध करें कि–

(i) $\sin 7\frac{1^0}{2}=\frac{\sqrt{4-\sqrt{2}-\sqrt{6}}}{2\sqrt{2}}$

(ii) $\cot 7\frac{1^0}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$

20. यदि $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ एवं $\cos\beta=\frac{5}{13}$ हो, तो सिद्ध करें कि–

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\pm\frac{8}{\sqrt{65}}$$

21. यदि $\sec(\phi+\alpha)+\sec(\phi-\alpha)=2\sec\phi$, तो सिद्ध करें कि

$$\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

1.7 त्रिकोणमितीय तादात्म्य (सर्वसमिकाएँ)

(Trigonometric identities)

प्रस्तावना:

बीजगणित तथा त्रिकोणमिति में आप तादात्म्य (सर्वसमिका) (Identity) से पूर्व परिचित है। पूर्व के अध्यायों में आपने जितने त्रिकोणमितीय सूत्रों की जानकारी प्राप्त की है, वे सब तादात्म्य (सर्वसमिका) है।

हम यहाँ मुख्यत: तीन या तीन से अधिक कोणों से सम्बंधित प्रतिबंधित तादात्म्यों के विषय में जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे। त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180° होता है। अत: $A+B+C=180^\circ=\pi^c$ पर आधारित तादात्म्यों का त्रिकोणमिति में अपना एक विशेष महत्त्व है। आगे के अभ्यास त्रिभुज के गुण में भी आप इसकी उपयोगिता का अनुभव करेंगे। $A+B+C=\pi^c$ का अर्थ है π^c।

इस अध्याय में पूर्व में पढ़े विभिन्न सूत्रों का उपयोग होता है। अत: पूर्व के सूत्रों को याद कर लेना चाहिए। इससे इस अध्याय के प्रश्नोत्तर में बड़ी सरलता आ जाएगी।

उदाहरण 1: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin(B+C)=\sin A$

(ii) $\cos(B+C)=-\cos A$

(iii) $\tan(A+B)=-\tan C$

हल: (i) $\because \quad A+B+C=\pi$

या, $(B+C)=\pi-A$

या, $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)$

या, $\sin(B+C)=\sin A$

(ii) $\because \quad A+B+C=\pi$

या, $B+C=\pi-A$

या, $\cos(B+C)=\cos(\pi-A)=-\cos A$

(iii) $\because \quad A+B+C=\pi$

या, $A+B=\pi-C$

या, $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$

या, $\tan(A+B)=-\tan C$

उदाहरण 2: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि–

(i) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$

(iii) $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cot\frac{C}{2}$

हल: ∵ (i) $A+B+C=\pi$

या, $A+B+C=\pi-C$

या, $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

या, $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$=\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)$

$=\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$

या, $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)$

$=\sin\frac{A}{2}$

(iii) $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

या, $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$=\cot\frac{C}{2}$

उदाहरण 3: यदि $A+B+C+D=360^0$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)$

(ii) $\cos\frac{A+B}{2}=-\cos\frac{C+D}{2}$

(iii) $\sin(A+B)=-\sin(C+D)$

(iv) $\cos(A+B)=\cos(C+D)$

हल: (i) $A+B+C+D=360^0$

या, $A+B=360^0-C-D$

या, $\frac{A+B}{2}=180^0-\frac{C+D}{2}$

या, $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(180^0-\frac{C+D}{2}\right)$

$=\sin\frac{C+D}{2}$

(ii) पुनः $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\cos\left\{180^0-\frac{C+D}{2}\right\}$

$=-\cos\frac{C+D}{2}$

(iii) $\sin(A+B)=\sin\{360^0-(C+D)\}$

$=-\sin(C+D)$

(iv) $\cos(A+B)=\cos\{360^0-(C+D)\}$

$=\cos(C+D)$

उदाहरण 4: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A.\sin B.\sin C$

हल: बायाँ पक्ष $=\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin A.\cos A+2\sin\frac{2B+2C}{2}.\cos\frac{2B-2C}{2}$

$$= 2\sin A.\cos A + 2\sin(B+C).\cos(B-C)$$

$$(\because \sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A)$$

$$= 2\sin A.\cos A + 2\sin A.\cos(B-C)$$

$$= 2\sin A\{\cos A + \cos(B-C)\}$$

$$= 2\sin A\{-\cos(B+C) + \cos(B-C)\}$$

$$(\text{क्योंकि} \cos(B+C) = -\cos A)$$

$$= 2\sin A\{\cos(B-C) - \cos(B+C)\}$$

$$= 2\sin A \times 2\sin B.\sin C$$

$$= 4\sin A.\sin B.\sin C.$$

उदाहरण 5: यदि $A+B+C = \pi^c = 180^\circ$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= \cos A + \cos B + \cos C$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\left(\because \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right.$$

$$\left.\therefore \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right\}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{C}{2}\left\{\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right.$$

$$=1+2\sin\frac{C}{2}\times 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$=1+4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$$

उदाहरण 6: यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A.\cos B.\cos C$$

हल: बायाँ पक्ष $=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\cos^2 A+2\cos^2 B+2\cos^2 C\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\cos 2A+1+\cos 2B+2\cos^2 C\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+\cos 2A+\cos 2B+2\cos^2 C\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+2\cos\frac{2A+2B}{2}.\cos\frac{2A-2B}{2}+2\cos^2 C\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+2\cos(A+B).\cos(A-B)+2\cos^2 C\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2+2(-\cos C).\cos(A-B)+2\cos^2 C\right\}$$

(∵ जब $A+B+C=\pi$ तो $\cos(A+B)=-\cos C$)

$$=1-\cos C.\cos(A-B)+\cos^2 C$$

$$=1+\cos C\left\{\cos C-\cos(A-B)\right\}$$

$$=1+\cos C\left\{-\cos(A+B)-\cos(A-B)\right\}$$

$$=1+(-)\cos C\left\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\right\}$$

$$=1-2\cos A.\cos B.\cos C$$

उदाहरण 7: यदि $A+B+C=\pi$, तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}.\cos\frac{\pi-C}{4}$$

हल: $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$= \sin\frac{B+C}{2} + 2\cos\frac{B+C}{4}.\cos\frac{B-C}{4}$$

$$= 2\sin\frac{B+C}{4}.\cos\frac{B+C}{4} + 2\cos\frac{B+C}{4}.\cos\frac{B-C}{4}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{4}\left\{\sin\frac{B+C}{4} + \cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{4}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{4}\right) + \cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{4}\left\{\cos\frac{2\pi - B - C}{4} + \cos\frac{B-C}{4}\right\}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{4}\left\{2\cos\frac{2\pi - B - C + B - C}{8}.\cos\frac{2\pi - B - C - B + C}{8}\right\}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{4}.2\cos\frac{\pi - C}{4}.\cos\frac{\pi - B}{4}$$

$$= 4\cos\frac{A+B+C-A}{4}.\cos\frac{\pi - B}{4}.\cos\frac{\pi - C}{4}$$

$$= 4\cos\frac{\pi - A}{4}.\cos\frac{\pi - B}{4}.\cos\frac{\pi - C}{4}$$

उदाहरण 8: यदि $A+B+C=90^0$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A.\cot B.\cot C$$

हल: $\because A+B+C=90^0$

या, $A+B=90^0-C$

या, $\cot(A+B)=\cot(90^0-C)$

या, $\dfrac{\cot A.\cot B-1}{\cot A+\cot B} = \tan C = \dfrac{1}{\cot C}$

या, $\cot A+\cot B = \cot A.\cot B.\cot C - \cot C$

या, $\cot A+\cot B+\cot C = \cot A.\cot B.\cot C$

उदाहरण 9: यदि $A+B+C=90^0$, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2\sin A.\sin B.\sin C$$

हल: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

$$= \frac{1}{2}\{2\sin^2 A + 2\sin^2 B + 2\sin^2 C\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2\sin^2 A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C\}$$

$$= \frac{1}{2}\{2 + 2\sin^2 A - (\cos 2B + \cos 2C)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2 + 2\sin^2 A - 2\cos\frac{2B+2C}{2}.\cos\frac{2B-2C}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\times 2\{1 + \sin^2 A - \cos(B+C).\cos(B-C)\}$$

$$= 1 + \sin^2 A - \sin A.\cos(B-C)$$

(जब $A+B+C=90^0$, तब $\cos(B+C)=\sin A$)

$$= 1 + \sin A\{\sin A - \cos(B-C)\}$$

$$= 1 + \sin A\{\cos(B+C) - \cos(B-C)\}$$

$$= 1 + \sin A.2\sin\frac{B+C+B-C}{2}.\sin\frac{B-C-B-C}{2}$$

$$= 1 + \sin A.2\sin B.\sin(-C)$$

$$= 1 - 2\sin A.\sin B.\sin C$$

द्वितीय विधि:

$\because\ A+B+C=90^0$

या, $A+B=90^0-C$

या, $\cos(A+B)=\cos(90^0-C)$

या, $\cos A.\cos B - \sin A.\sin B = \sin C$

या, $\cos A.\cos B = \sin A.\sin B + \sin C$

या, $(\cos A.\cos B)^2 = (\sin A.\sin B + \sin C)^2$

या, $\cos^2 A\cdot\cos^2 B = \sin^2 A\cdot\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$

या, $(1-\sin^2 A).(1-\sin^2 B) = \sin^2 A.\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A.\sin B.\sin C$

या, $1 - \sin^2 B - \sin^2 A + \sin^2 A.\sin^2 B$
$= \sin^2 A.\sin^2 B + \sin^2 C + 2\sin A.\sin B.\sin C$

$$1-2\sin A.\sin B.\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$$

या, $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1-2\sin A.\sin B.\sin C$

उदाहरण 10: यदि $x+y+z=xyz$, तो त्रिकोणमिति से सिद्ध करें कि–

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$

हल: $\because\ x+y+z=xyz$

मान लें कि $x=\tan A, y=\tan B$ और $z=\tan C$

$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

या, $\tan A+\tan B=\tan A.\tan B.\tan C-\tan C$

या, $\tan A+\tan B=\tan C(\tan A.\tan B-1)$

या, $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A.\tan B-1}=\tan C$

या, $\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

या, $\tan(A+B)=\tan(180^0-C)$

या, $A+B=180^0-C$

या, $A+B+C=180^0$

या, $2A+2B+2C=360^0$

या, $\tan(2A+2B)+\tan(360^0-2C)$

या, $\dfrac{\tan 2A+\tan 2B}{1-\tan 2A.\tan 2B}=-\tan 2C$

या, $\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A.\tan 2B.\tan 2C$

या, $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}+\dfrac{2\tan B}{1-\tan^2 B}+\dfrac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$

$$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\times\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}\times\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$$

या, $$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$

उदाहरण 11: यदि $A+B+C+D=360^0$ तो सिद्ध करें कि-

$$\cos A-\cos B+\cos C-\cos D$$
$$=4\sin\frac{C+D}{2}.\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{A+C}{2}$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+D}{2}.\cos\frac{A+C}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\cos A-\cos B+\cos C-\cos D$

$$=(\cos A+\cos C)-(\cos B+\cos D)$$
$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}-2\cos\frac{B+D}{2}.\cos\frac{B-D}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}-2\cos\frac{A+B+C+D-A-C}{2}.\cos\frac{B-D}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}-2\cos\left(\pi-\frac{A+C}{2}\right)\cos\frac{B-D}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{B-D}{2}$$
$$=2\cos\frac{A+C}{2}\left\{\cos\frac{A-C}{2}+\cos\frac{B-D}{2}\right\}$$
$$=2\cos\frac{A+C}{2}.2\cos\frac{A-C+B-D}{4}.\cos\frac{A-C-B+D}{4}$$
$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A+B+C+D-2C-2D}{4}$$
$$.\cos\frac{A+B+C+D-2C-2B}{4}$$
$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\cos\left(90^0-\frac{C+D}{2}\right).\cos\left(90^0-\frac{B+C}{2}\right)$$
$$=4\cos\frac{A+C}{2}.\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{B+C}{2} \qquad \text{.....(i)}$$

$$= 4\cos\frac{A+C}{2}.\sin\frac{A+B+C+D-(A+B)}{2}.\sin\frac{A+B+C+D-(A+$$

$$= 4\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+D}{2}$$

$$= 4\sin\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+D}{2}.\cos\frac{A+C}{2} \quad \text{.....(ii)}$$

उदाहरण-12 यदि $A+B+C=180^0, \tan A=2, \tan B=3$, तो सिद्ध करें कि- $C=45^0$

हल: $A+B+C=180^0$

या, $A+B=180^0-C$

या, $\tan(A+B)=\tan(180^0-C)$

या, $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A.\tan B}=-\tan C$

या, $\frac{2+3}{1-2\times3}=-\tan C$

या, $\frac{5}{-5}=-\tan C$

या, $\tan C=1$

या, $\tan C=\tan 45^0$ या $\tan 225^0$

या, $C=45^0$ या 225^0

$\because$ $A+B+C=180^0$

$\therefore$ $C\neq225^0$

$\therefore$ $C=45^0$

—

प्रश्नाला–8

1. यदि $A+B+C=\pi(180^0)$ तो सिद्ध करें कि-
   (i) $\sin(A+B)=\sin C$
   (ii) $\sin(A+C)=\sin B$
   (iii) $\cos(A+B)=-\cos C$
   (iv) $\cos(A+C)=-\cos B$
   (v) $\tan(B+C)=-\tan A$
   (vi) $\tan(A+C)=-\tan B$

2. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-
   (i) $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$
   (ii) $\sin\frac{A+C}{2}=\cos\frac{B}{2}$
   (iii) $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$
   (iv) $\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$
   (v) $\tan\frac{(B+C)}{2}=\cot\frac{A}{2}$
   (vi) $\tan\frac{A+C}{2}=\cot\frac{B}{2}$

3. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-
   (i) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A.\cos B.\cos C$
   (ii) $\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C=4\cos A.\cos B.\cos C$
   (iii) $\cos 2A-\cos 2B+\cos 2C=1-4\sin A.\sin B.\sin C$
   (iv) $\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C=4\cos A.\sin B.\cos C$
   (v) $\sin 2A-\sin 2B-\sin 2C=-4\sin A.\sin B.\sin C$

4. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

(ii) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}-1$

(iii) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

(iv) $\cos A-\cos B+\cos C=4\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}-1$

5. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

(ii) $\cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=1+2\cos 2A.\cos 2B.\cos 2C$

(iii) $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=2\sin A.\sin B.\cos C$

6. यदि $A+B+C=\pi$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$=4\cos\frac{\pi+A}{4}.\cos\frac{\pi-B}{4}.\cos\frac{\pi+C}{4}$

(ii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}.\sin\frac{\pi-B}{4}.\sin\frac{\pi-C}{4}$

(iii) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$

7. यदि $A+B+C=90^\circ$, तो सिद्ध करें कि-

(i) $\tan A.\tan B+\tan B.\tan C+\tan C.\tan A=1$

(ii) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A.\cos B.\cos C$

(iii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=1+4\sin A.\sin B.\sin C$

(iv) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=2(1+\sin A.\sin B.\sin C)$

8. $x+y+z=xyz$, तो त्रिकोणमिति से सिद्ध करें-

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

$$=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}$$

9. यदि $A+B+C+D=360^0$ तो सिद्ध करें कि-

(i) $\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{C+A}{2}$$

(ii) $\sin A-\sin B+\sin C-\sin D$

$$=-4\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A+C}{2}.\cos\frac{A+D}{2}$$

10. यदि किसी त्रिभुज ABC में, $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6}, \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$

तो सिद्ध करें कि $\tan\frac{C}{2}=\frac{2}{5}$

1.8 त्रिकोणमितीय समीकरणों का हल

(जब कोण 0° से 360°के बीच हों)

प्रस्तावना

त्रिकोणमितीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें एक या एक से अधिक त्रिकोणमितीय अनुपात सम्मिलित हो तथा जो सम्बद्ध (associated) कोण या कोणों के कुछ मानों के लिए सत्य हों।

यहाँ समीकरण के हल करने का अर्थ संबद्ध कोण या कोणों के मान ज्ञात करने हैं जो दिये समीकरण को संतुष्ट करें। अज्ञात कोण के वे मान जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं, समीकरण के मूल (Roots) कहलाते हैं।

त्रिकोणमिति में किसी परिमाण(magnitude) का कोण संभव है। अत: किसी समीकरण के अनगिनत हल हो सकते हैं।

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ एक सरल त्रिकोणमितीय समीकरण हैं। यह संबद्ध कोण $\theta=30^\circ$, $150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, 750^\circ, 870^\circ, \ldots$ आदि के लिए सत्य है। अत: ये सभी कोण उपरोक्त समीकरण के हल होंगे। हम यहाँ अपने को सिर्फ उन हलों के लिए सीमित रखेंगे, जो 0° से 360° के बीच हो। इस विशेष स्थिति में $\sin\theta=\frac{1}{2}$ का हल $\theta=30^\circ$, या 150° होगा।

समीकरण हल करने के सामान्य निर्देश:

(i) समीकरण को सरल कर यथसंभव सरलतम रूप में लावें।

(ii) यदि समीकरण द्विघातीय हो तब बीजगणितीय विधि से गुणनखण्ड निकालकर एक घातीय बनावें। जैसे-
$4\sin^2\theta-3\sin\theta-1=0$, को $(4\sin+1)(\sin-1)=0$ में बदलें।

(iii) यदि किसी समीकरण में एक से अधिक त्रिकोणमितीय निष्पतियाँ (Trigonometrical ratios)हों तो उन्हें एक निष्पति में बदलें। जैसे-
$\sin^2\theta-\cos+1=0$, को सरल कर $\cos^2\theta+\cos\theta-2=0$ में बदलें।

(iv) 0° से 360° के बीच के त्रिकोणमितीय अनुपात के मान को याद रखें,

जो 15° के अपवर्त्य हैं। खासकर $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ तथा 0° का मान अवश्य याद रखें।

(v) $\sin\theta, \cos\theta$ वाले समीकरण,

यथा, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

$\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2$, तरह के समीकरण को $\sin(A \pm B)$ या $(A \pm B)$ के रूप में बदलकर हल करने में सुविधा होती है। इसके लिए $\sin\theta$ तथा θ के गुणांकों के वर्ग के योग के वर्गमूल से बाएँ तथा दाएँ पक्ष में भाग दें।

जैसे, $\sin\theta + \cos\theta = 1$ को सरल करते समय $\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ से भाग दें।

$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$ को सरल करते समय $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ से भाग दें।

इसे बाद के उदाहरणों में और स्पष्ट किया गया है।

(vi) निम्नांकित सूत्र एक से अधिक मान प्राप्त करने में सहायक होंगे।

$\sin\theta = \sin(180^\circ - \theta)$

$\cos\theta = \cos(360^\circ - \theta)$

$\tan\theta = \tan(180^\circ + \theta)$

(vii) $\cot\theta, \sec\theta, \operatorname{cosec}\theta$ को $\sin\theta, \cos\theta$ के रूप में बदल कर हल करने में अक्सर सुविधा होती है।

(viii) समीकरण को हल करने पर जो हल प्राप्त होते हैं, वे सारे हल समीकरण को संतुष्ट नहीं भी कर सकते हैं। इसकी जाँच अवश्य कर लेनी चाहिए। जो हल अमान्य हों उन्हें छोड़ देना चाहिए।

प्रमुख सूत्र

1. यदि $\sin\theta = \sin\alpha$ तब $\theta = \alpha$ या $180^\circ - \alpha$
2. यदि $\cos\theta = \cos\alpha$ तब $\theta = \alpha$ या $360^\circ - \alpha$
3. यदि $\tan\theta = \tan\alpha$ तब $\theta = \alpha$ या $180^\circ + \alpha$

नोट: याद रखें, $\sin\theta = \sin \times \theta$ नहीं है अत: $\sin\theta = \sin\alpha$ के हल में sin को नहीं काटना चाहिए।

जैसे $\sin\theta = \sin\alpha$; $\therefore \theta = \alpha$

इसके बदले sin को छोड़कर अभीष्ट उत्तर लिखना चाहिए।

जैसे- $\sin\theta = \sin\alpha$, $\therefore \theta = \alpha$

अब हम उदाहरणों की मदद से समीकरण को हल करेंगे।

उदाहरण 1: हल करें:

(i) $\sin\theta = \sin 30^\circ$

(ii) $\sin 2\theta = \cos 2\theta$

हल:

(i) $\because \sin\theta = \sin 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

(ii) $\sin 2\theta = \cos 2\theta$

या, $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 2\theta)$

या, $2\theta = 90^\circ - 2\theta$, या $\theta = 22\frac{1}{2}^\circ$

(ii) की जाँच

बायाँ पक्ष $= \sin 2\theta = \sin 2 \times 22\frac{1}{2}^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

दाया पक्ष $= \cos 2\theta = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\because \theta = 22\frac{1}{2}^\circ$ समीकरण को संतुष्ट करता है अत: यह मान्य हल है।

कोण निष्पतियाँ	sin	cos	tan	cot	sec	cos *ec*
0°	0	1	0	अपरिभाषित	1	अपरिभाषित
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	1
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
135°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	2
180°	0	-1	0	अपरिभाषित	-1	अपरिभाषित
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\sqrt{3}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	-2
225°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+1$	$+1$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\sqrt{3}$	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
270°	-1	0	अपरिभाषित	0	अपरिभाषित	-1
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$+2$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
315°	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$+\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{+2}{\sqrt{3}}$	-2
360°	0	$+1$	0	अपरिभाषित	$+1$	अपरिभाषित

आकृति.11

उदाहरण: निम्नांकित समीकरणों को हल करें-

(i) $\sin\theta = \cos\theta$

(ii) $\tan\theta = 2\sin\theta$

(iii) $\tan + \cot\theta = 2$

हल: (i) $\because \sin\theta = \cos\theta$

या, $\sin\theta = \sin(90^0 - \theta)$

या, $\theta = 90^0 - \theta$

या, $2\theta = 90^0$

या, $\theta = 45^0$

द्वितीय विधि:

$\sin\theta = \cos\theta$

या, $\sin^2\theta = \cos^2\theta$

या, $\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

या, $2\sin^2\theta = 1$

या, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

या, $\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$

जाँच: $\theta = 45^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $= \frac{1}{\sqrt{2}}$; दायाँ पक्ष $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 135^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, दायाँ पक्ष $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 225^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $= \frac{-1}{\sqrt{2}}$, दायाँ पक्ष $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 315^\circ$ रखने पर बायाँ पक्ष $= \frac{-1}{\sqrt{2}}$, दायाँ पक्ष $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

यहाँ 45° तथा 225° समीकरण को संतुष्ट करता है। अतः उपरोक्त समीकरण का हल = 45° या 225°

(ii) $\tan\theta = 2\sin\theta$

या, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta$

या, $2\sin\theta.\cos\theta = \sin\theta$

या, $\sin 2\theta = \sin\theta$

या, $\sin 2\theta = \sin(180^\circ - \theta) = \sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$

$\therefore$ $2\theta = 180^\circ - \theta$, या, $360^\circ + \theta$ या θ

$\therefore$ $\theta = 60^\circ$ या 360° या 0°

द्वितीय विधि-

$$\tan\theta = 2\sin\theta$$

या, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2\sin\theta$

या, $\sin 2\theta = \sin\theta$

या, $\sin 2\theta - \sin\theta = 0$

या, $2\cos\frac{2\theta+\theta}{2}.\sin\frac{2\theta-\theta}{2} = 0$

या, $2\cos\frac{3\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2} = 0$

$\therefore$ या तो $\cos\frac{3\theta}{2} = 0$ या $\sin\frac{\theta}{2} = 0$

जब $\cos\frac{3\theta}{2} = 0$

तब, $\frac{3\theta}{2} = 90^\circ$ या 270°

$\theta = 60^\circ$ या 180°

जब $\sin\frac{\theta}{2} = 0$

तब, $\frac{\theta}{2} = 0^\circ,\ 180^\circ$ या 360°

$\therefore$ $\theta = 0^\circ,\ 360^\circ$ या 720°

720° को छोड़ते हुए।

समीकरण का हल $= 0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

तृतीय विधि-

$$\tan\theta = 2\sin\theta$$

या, $2\sin\theta.\cos\theta = \sin\theta$

या, $4\sin^2\theta.\cos^2\theta = \sin^2\theta$

या, $4\sin^2\theta.\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$

या, $\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1)=0$

या तो $\sin^2\theta=0$ या $4\cos^2\theta-1=0$

या तो $\sin\theta=0$ या $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$

$\theta=0°,180°,360°,60°,320°,120°$ या $240°$

यहाँ $120°$ या $240°$ समीकरण को संतुष्ट नहीं करता है।

अत: समीकरण का हल $=0°,60°,180°,320°,360°$

जाँच:

$\theta=0°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=0$, दायाँ पक्ष $=0$

$\theta=60°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\sqrt{3}$, दायाँ पक्ष $=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$।

$\theta=180°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=0$, दायाँ पक्ष $=0$

$\theta=120°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=(-\sqrt{3})$, दायाँ पक्ष $=\sqrt{3}$

$\theta=240°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=\sqrt{3}$, दायाँ पक्ष $=-\sqrt{3}$

$\theta=320°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=-\sqrt{3}$, दायाँ पक्ष $=-\sqrt{3}$

$\theta=360°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=0$, दायाँ पक्ष $=0$

(iii) $\tan\theta+\cot\theta=2$

या, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=2$

या, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=2$

या, $\sin 2\theta=1$

या, $2\theta=90°$

$\therefore$ $\theta=45°$

द्वितीय विधि-

$2\sin\theta\cdot\cos\theta=1$

या, $4\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta=1$

या, $4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=1$

या, $4\sin^2\theta-4\sin^4\theta=1$

या, $4\sin^4\theta-4\sin^2\theta+1=0$

या, $(2\sin^2\theta-1)^2=0$

या, $2\sin^2\theta-1=0$

या, $2\sin^2\theta=1$

या, $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$

$\sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \theta=45°,135°,225°,315°$

जाँच:

$\theta=45°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=1+1=2$, दायाँ पक्ष $=2$

$\theta=135°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=-1-1=-2$, दायाँ पक्ष $=2$

$\theta=225°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=1+1=2$, दायाँ पक्ष $=2$

$\theta=315°$ रखने पर बायाँ पक्ष $=-1-1=-2$, दायाँ पक्ष $=2$

अत: समीकरण का हल $=45°$ या $225°$

उदाहरण 3: हल करें:

(i) $\sin\theta=\frac{1}{2}$

(ii) $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\sin^2\theta=1$

(iv) $\cot^2\theta=\frac{1}{3}$

(v) $4\cos^2\theta=3$

हल:

(i) $\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\sin\theta = \sin 30^\circ$ या $\sin 150^\circ$

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$ या 150°

(ii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

या, $\cos\theta = \cos 30^\circ$ या $\cos 330^\circ$

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$ या 330°

(iii) $\sin^2\theta = 1$

या, $\sin\theta = \pm 1 = \sin 90^\circ$ या $\sin 270^\circ$

$\therefore \quad \theta = 90^\circ$ या 270°

(iv) $\cot^2\theta = \frac{1}{3}$

या, $\cot\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$ या $\cot 240^\circ$

या $\cos 120^\circ$ या $\cot 300^\circ$

$\therefore \quad \theta = 60^\circ$ या 120° या 240° या 300°

(v) $4\cos^2\theta = 3$

या, $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$

या, $\cos 330^\circ$ या $\cos 150$ या $\cos 210$

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$ या 150° या 210° या 330°

उदाहरण 4: हल करें:

$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

दोनों ओर $\sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ से भाग देने पर,

या, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

या, $\cos 45^\circ \cdot \sin\theta + \sin 45^\circ \cdot \cos\theta = 1$

या, $\sin(\theta + 45^\circ) = \sin 90^\circ$

या, $\theta + 45^\circ = 90^\circ$

या, $\theta = 45^\circ$

द्वितीय विधि:

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

दोनो ओर वर्ग करने पर,

$\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cdot\cos\theta=2$

या, $\sin 2\theta=1$

या, $\sin 2\theta=\sin 90°$ या, $\sin 450°$

या, $\theta=45°$ या, $225°$

जाँच:

$\theta=45°$ मानने पर,

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ मान्य हल

$\theta=225°$ मानने पर,

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ अमान्य हल

∴ मान्य हल $=45°$

उदाहरण 5: हल करें

$\cos\theta+\sec\theta=\frac{5}{2}$

या, $\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{5}{2}$

या, $\frac{\cos^2\theta+1}{\cos\theta}=\frac{5}{2}$

या, $2\cos^2\theta+2=5\cos\theta$

या, $2\cos^2\theta-5\cos\theta+2=0$

या, $2\cos^2\theta-4\cos\theta-\cos\theta+2=0$

या, $2\cos\theta(\cos\theta-2)-1(\cos\theta-2)=0$

या, $(\cos\theta-2)(2\cos\theta-1)=0$

या तो $\cos\theta-2=0$ या $2\cos\theta-1=0$

जब $\cos\theta-2=0$

तब $\cos\theta=2$ यह मान असंभव है।

जब $2\cos\theta-1=0$

या, $2\cos\theta=1$

या, $\cos\theta\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ या $\cos 300^\circ$

$\therefore$ $\theta=60^\circ$ या 300°

जाँच:

$$\cos 60^\circ+\sec 60^\circ=\frac{5}{2}$$

$$\cos 300^\circ+\sec 300^\circ=\frac{5}{2}$$

अत: दोनों मान मान्य हैं।

उदाहरण 6: हल करें:

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$$

हल:

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$$

या, $1-\sin^2\theta-\sin\theta=\frac{1}{4}$

या, $\sin^2\theta+\sin\theta-\frac{3}{4}=0$

या, $4\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0$

या, $4\sin^2\theta+6\sin\theta-2\sin\theta-3=0$

या, $2\sin\theta(2\sin\theta+3)-1(2\sin\theta+3)=0$

या, $(2\sin\theta-1)(2\sin\theta+3)=0$

या तो $2\sin\theta+3=0$; या $2\sin\theta-1=0$

यदि $2\sin\theta+3=0$

तब $\sin\theta=-\frac{3}{2}$

यह मान अमान्य है क्योंकि $\sin\theta$ का मान -1 से कम नहीं हो सकता।

यदि $2\sin\theta-1=0$

तब $2\sin\theta=1$

या, $\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\sin\theta=\sin 30^\circ$ या $\sin 150^\circ$

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ या 150°

जाँच:

$\theta=30^\circ$ मानने पर,

$$\cos^2\theta-\sin\theta=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\text{ (संतुष्ट)}$$

$\theta=150^\circ$ मानने पर,

$$\cos^2\theta-\sin\theta-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\text{ (संतुष्ट)}$$

अत: मान्य हल $=30^\circ$ या 150°

उदाहरण 7: हल करें:

$$4\cos^2\theta+\sqrt{3}=2(\sqrt{3}+1)\cos\theta$$

हल:

$\because$ $4\cos^2\theta+\sqrt{3}=2(\sqrt{3}+1)\cos\theta$

या, $4\cos^2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta-2\cos\theta+\sqrt{3}=0$

या, $2\cos\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})-1(2\cos\theta-\sqrt{3})=0$

या, $(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta-1)=0$

$\therefore$ या तो $2\cos\theta-\sqrt{3}=0$ या $2\cos\theta-1=0$

यदि $2\cos\theta-\sqrt{3}=0$

तब $2\cos\theta=\sqrt{3}$

या, $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$ या $\cos 330^\circ$

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ या 330°

यदि $2\cos\theta-1=0$

तब $2\cos\theta=1$

या, $\cos\theta=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$ या $\cos 300^\circ$

$\therefore$ $\theta=60^\circ$ या 300°

$\therefore$ $\theta=30^\circ$ या 60° या 300° या 330°

जाँच:

मान लें कि $\theta=30^\circ$

अब $4\cos^2 30^\circ+\sqrt{3}=4\times\frac{3}{4}=3+\sqrt{3}$

$2(\sqrt{3}+1)\cos 30=2(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}$ (संतुष्ट)

माने लें कि $\theta=60^\circ$

$4\cos^2 60^\circ+\sqrt{3}=4\times\frac{1}{4}+\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$

$2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ=2(\sqrt{3}+1)\times\frac{1}{2}=1+\sqrt{3}$ (संतुष्ट)

यह समीकरण 300° तथा 330° को भी संतुष्ट करता है।

अत: $\theta=30^\circ, 60^\circ, 300^\circ$ या 330° मान्य हल है।

उदाहरण:8 हल करें: $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=1$

हल: दोनों पक्षों में $\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^{-2}}=2$ से भाग देने पर,

या $\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\cos 60° \cdot \cos\theta - \sin 60° \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}$

या, $\cos(\theta + 60°) = \cos 60°$ या $\cos 300°$

या, $\theta = 0°$ या $240°$

जाँच:

$\theta = 0°$ मानें

$\cos 0° - \sqrt{3}\sin 0° = 1 - 0 = 1$ मान्य हल

$\theta = 240°$ मानें

$\cos 240° - \sqrt{3}\sin 240°$

$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ मान्य हल

अत: हल = $0°$ या $240°$

उदाहरण 9: हल करें: $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

प्रथम विधि:

$\because \quad \cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

वर्ग करने पर,

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}$$

या, $1 - \frac{1}{2} = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

या, $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

या, $\sin 2\theta = \sin 30°$ या $\sin 150°$ या $\sin 390°$ या $510°$

या, $\theta = 15°, 75°$ या $195°$ या $255°, 75°$ तथा $195°$ मान्य नहीं है।

$\therefore \quad \theta = 15$ तथा $255°$

द्वितीय विधि:

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ से भाग देने पर $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta = \frac{1}{2}$

या, $\cos\theta \cdot \cos 45° - \sin\theta \cdot \sin 45° = \frac{1}{2}$

या, $\cos(\theta + 45°) = \cos 60°$ या $\cos 300°$

$\therefore$ $\theta + 45° = 60°$; या $\theta + 45° = 300°$

या, $\theta = 15°$ या $255°$

तृतीय विधि:

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}$ से भाग देने पर $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin = \frac{1}{2}$

या, $\sin 45° \cdot \cos\theta - \cos 45° \cdot \sin\theta \frac{1}{2}$ .....(i)

या, $\sin(45° - \theta) = \sin 30°$ या $\sin 150°$

$\therefore$ $45° - \theta = 30°$ या $45° - \theta = 150°$

$\therefore$ $\theta = 15°$ या $-105°$

$\theta - 15°$ या $255°$ $(-105° - 255°)$

चतुर्थ विधि:

$$\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

या, $\sin 45° \cdot \cos\theta - \cos 45° \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}$ [समीकरण (i) से]

या, $\sin\theta \cdot \cos 45° - \cos\theta \cdot \sin 45° = -\frac{1}{2}$

या, $\sin(\theta - 45°) = \sin 210°$ या $\sin 330°$

$\therefore \quad \theta - 45° = 210°$ या $330°$

$\therefore \quad \theta = 255°$ या $375°$

$= 255°$ या $15°(375° \Rightarrow 15°)$

जाँच:

$\cos\theta - \sin\theta$

$= \cos 15° - \sin 15°$ (मान लें $\theta = 15°$)

$= \cos(90° - 75°) - \sin 15°$

$= \sin 75° - \sin 15°$

$= 2\cos\frac{75°+15°}{2} \times \frac{75°-15°}{2} = 2\cos 45° \cdot \sin 30°$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

पुन: $\cos\theta - \sin\theta$

$= \cos 255° - \sin 255°$ (मानें $\theta = 255°$)

$= \cos(360° - 105°) - \sin(360° - 105°)$

$= \cos 105° + \sin 105°$

$= \cos(90° + 15°) + \sin(90° + 15°)$

$= -\sin 15° + \cos 15°$

$= \cos 15° - \sin 15°$

नोट: कभी-कभी विभिन्न विधियों में भिन्न-भिन्न हल आ सकते हैं और वे मान्य भी हो सकते हैं। छात्रों को सलाह दी जाती है कि वे किसी भी विधि से मान्य हल निकालें। हम कम-से-कम दो हल की अपेक्षा करते हैं, यदि यह असंभव हो या कठिनाई से प्राप्त हों तो एक हल ही ज्ञात करें।

उदाहरण 10: हल करें: $\cos 3\theta + \sin 3\theta = \cos\theta + \sin\theta$

हल: $\because \quad \cos 3\theta + \sin 3\theta = \cos\theta + \sin\theta$

या, $\sin 3\theta - \sin\theta = \cos\theta - \cos 3\theta$

या, $2\cos\frac{3\theta+\theta}{2} \cdot \sin\frac{3\theta-\theta}{2} = 2\sin\frac{\theta+3\theta}{2} \cdot \sin\frac{3\theta-\theta}{2}$

या, $\cos 2\theta \cdot \sin\theta = 2\sin 2\theta \cdot \sin\theta$

या, $2\sin\theta(\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0$

या, $\sin\theta(\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0$

या तो $\sin\theta = 0$ या $\cos 2\theta - \sin 2\theta = 0$

जब $\sin\theta = 0$

तब $\theta = 0°$ या $180°$ या $360°$

पुन: जब $\cos 2\theta - \sin 2\theta = 0$

या, $\cos 2\theta = \sin 2\theta$

या, $\cos 2\theta = \cos(90° - 2\theta)$

या, $2\theta = 90° - 2\theta$

या, $4\theta = 90°$

या, $\theta = \frac{90}{4} = 22\frac{1°}{2}$

$\therefore$ $\theta = 0°, 22\frac{1}{2}, 180°$ या $360°$

जाँच:

$\theta = 0°, 22\frac{1°}{2}, 180°$ या $360°$ को उपरोक्त समीकरण संतुष्ट करता है।

अत: सभी हल मान्य है।

उदाहरण 11: हल करें: $\cos 3\theta \cdot \sin^3\theta + \sin 3\theta \cdot \cos^3\theta = 0$

हल: $\because$ $\cos 3\theta \cdot \sin^3\theta + \sin 3\theta \cdot \cos^3\theta = 0$

या, $(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)\sin^3\theta + (3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\cos^3\theta = 0$

या, $4\sin^3\theta \cdot \cos^3\theta - 3\sin^3\theta \cdot \cos\theta + 3\sin\theta \cdot \cos^3\theta - 4\sin^3\theta \cdot \cos^3\theta = 0$

या, $3\sin\theta \cdot \cos^3\theta - 3\sin^3\theta \cdot \cos\theta = 0$

या, $3\sin\theta \cdot \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$

या, $3\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta = 0$

$\therefore$ या तो $\sin\theta = 0$

या, $\cos\theta = 0$

(i) जब $\sin\theta = 0$ तब $\theta = 0°$ या $180°$

(ii) जब $\cos\theta = 0$ तब $\theta = 90°$ या $270°$

(iii) जब $\cos 2\theta = 0$ तब $2\theta = 90°$ या $270°$ या $\theta = 45°$ या $135°$

$\therefore$ $\theta = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 180°, 270°$; ये सभी मान दिए समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

अत: ये सभी मान समीकरण के हल हुए।

उदाहरण 12: हल करें: $\cos\theta = \sin 105° + \cos 105°$

हल: $\because$ $\cos\theta = \sin 105° + \cos 105°$

या, $\cos\theta = \sin 105° + \cos(90° + 15°)$

या, $\cos\theta = \sin 105° - \sin 15°$

या, $\cos\theta = 2\cos\frac{105° + 15°}{2} \cdot \sin\frac{105° - 15°}{2}$

या, $\cos\theta = 2\cos 60°, \sin 45° = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

या, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45°$ या $\cos 315°$

$\therefore$ $\theta = 45°$ या $315°$

उदाहरण 13: यदि $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$

तो सिद्ध करें कि-

$$\sin 2\theta = \pm\frac{3}{4}$$

हल: $\because$ $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$

या, $\sin(\pi\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta\right)$

या, $\pi\cos\theta = \frac{\pi}{2} \pm \pi\sin\theta$

या, $\cos\theta \mp \sin\theta = \frac{1}{2}$

या, $\cos^2\theta+\sin^2\theta\mp 2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}$

या, $\mp\sin 2\theta=-\frac{3}{4}$

या, $\sin 2\theta=\pm\frac{3}{4}$

आगे स्वयं करें।

उदाहरण 14: यदि $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

तो सिद्ध करें कि-

$$\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

हल: $\because$ $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

या, $\sin(\pi\cos\theta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta\right)$

या, $\pi\cos\theta=\frac{\pi}{2}\pm\pi\sin\theta$

या, $\cos\theta=\frac{1}{2}\pm\sin\theta$

या, $\cos\theta\mp\sin\theta=\frac{1}{2}$

या, $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

या, $\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta\pm\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

या, $\cos\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}\mp\sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

या, $\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

उदाहरण 15: यदि $\tan(\cot\theta)=\cot(\tan\theta)$,

तो सिद्ध करें-

$$\sin 2\theta=\frac{4}{\pi} \text{ या } \frac{4}{3\pi}$$

$\because$ $\tan(\cot\theta)=\cot(\tan\theta)$

या, $\tan(\cot\theta)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\tan\theta\right)$

या, $\tan\left(\frac{3\pi}{2}\tan\theta\right)$

$\therefore$ या तो $\cot\theta=\frac{\pi}{2}-\tan\theta$

या, $\cot\theta+\tan=\frac{\pi}{2}$ .....(i)

या, $\cot\theta=\frac{3\pi}{2}-\tan\theta$

या, $\cot\theta+\tan\theta=\frac{3\pi}{2}$ .....(ii)

$\because$ $\cot\theta+\tan\theta=\frac{\pi}{2}$ .....(i)

$\therefore$ $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\pi}{2}$

या, $\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\pi}{2}$

या, $\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\pi}{2}$

या, $\frac{1}{2\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\pi}{4}$ या, $\sin 2\theta=\frac{4}{\pi}$

पुनः $\cot\theta+\tan\theta=\frac{3\pi}{2}$ .....(iii)

या, $\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{3\pi}{2}$

या, $\frac{1}{2\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{3\pi}{4}$

या, $\sin 2\theta=\frac{4}{3\pi}$

प्रश्नावली–9

निम्नलिखित समीकरणों को हल करें (जहाँ $0° \le \theta \le 360°$)

1. (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\sec\theta = 2$

(iii) $\tan\theta = -\sqrt{3}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta \frac{2}{\sqrt{3}}$

(v) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ (vi) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(vii) $\cot\theta = -1$ (viii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(ix) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (x) $\cot\theta =$ अपरिभाषित

(xi) $\cot\theta = 1$ (xii) $\sin\theta = \pm 1$

(xiii) $\tan\theta = -1$ (xiv) $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

(xv) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (xvi) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

(xvii) $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (xviii) $4\sin^2\theta = 3$

2. (i) $\tan\theta = 3\cot\theta$ (ii) $4\sec^2\theta - 7\tan^2\theta = 3$

(iii) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1$ (iv) $2\sin^2\theta + 5\sin\theta = 3$

(v) $\cot\theta = 2\cos\theta$ (vi) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

(vii) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ (viii) $6\cos^2\theta + 11\sin\theta = 10$

(ix) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$ (x) $\sin^2\theta - 2\cos\theta + \frac{1}{4} = 0$

(xi) $\sin^2 - \cos^2\theta = \cos\theta$ (xii) $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$

(xiii) $\operatorname{cosec}\theta - 2\sin\theta = 1$ (xiv) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2$

(xv) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 1$ (xvi) $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$

(xvii) $\cos 2\theta + \sin 3\theta = 0$ (xviii) $\tan 4\theta + \cot 6\theta = 0$

(xix) $\sin 5\theta + \sin 2\theta = 0$ (xx) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

(xxi) $3\tan^2\theta + 5 = 2\cot^2\theta$ (xxii) $2\cos\theta + 5\tan\theta = 4\sec\theta$

(xxiii) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ (xxiv) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$

(xxv) $\sin 4\theta = \sin 3\theta + \sin 2\theta$ (xxvi) $\sin 5\theta \cdot \cos 3\theta = \sin 9\theta \cdot \cos 7\theta$

(xxvii) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = 0$

(xxviii) $\tan\theta + \tan 2\theta = \tan 3\theta$

(xxix) $\tan\theta + \tan 2\theta + \tan\theta \cdot \tan 2\theta = 1$

3. यदि $\tan(\pi\cos\theta) = \cot(\pi\sin\theta)$, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin\theta + \cos\theta = \pm\frac{1}{2}$$

4. यदि $\sin(\pi\cos\theta) = \cos(\pi\sin\theta)$, तो सिद्ध करें कि-

$$\sin 2\theta = \pm\frac{3}{4}$$

5. सिद्ध करें कि निम्नांकित समीकरण संभव नहीं है।

(i) $\sin\theta = x + \frac{1}{x}$

(ii) $\cos\theta = x + \frac{1}{x}$

(जहाँ x वास्तविक संख्या है)

1.9 त्रिभुज के गुण (Properties of triangles)

प्रस्तावना:

किसी त्रिभुज में तीन भुजाएँ एवं तीन कोण होते हैं। यदि इन छः भागों में से कम से कम तीन भाग (जिनमें एक भुजा अवश्य हो) ज्ञात हों, तो त्रिभुज की शेष भुजाएँ एवं कोण त्रिकोणमितीय विधि से ज्ञात किए जा सकते हैं। तीनों कोण ज्ञात रहने पर अनगिनत त्रिभुज संभव हैं, इस स्थिति में उनकी भुजाओं के बीच संबन्ध स्थापित किए जा सकते हैं।

किसी त्रिभुज ABC में $\angle A$ को A, $\angle B$ को B तथा $\angle C$ को C कहा जा सकता है। $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ के सामने की भुजाएँ BC, AC तथा AB को क्रमशः a, b, तथा c कहा जाता है। त्रिभुज के क्षेत्रफल को Δ (डेल्टा) तथा उसके परिवृत्त की त्रिज्या को R माना जाता है।

त्रिभुज के गुण:

त्रिभुज के कोणों की त्रिकोणमितीय निष्पत्तियों और उसकी भुजाओं के पारस्परिक संबन्धों को त्रिभुज के गुण (Properties of triangles) कहते हैं।

ज्ञात भुजाओं या कोणों की मदद से शेष अज्ञात भुजा या कोण को त्रिकोणमितीय विधि से ज्ञात करने को त्रिभुज का निर्धारण (Solution of triangle) कहते हैं।

हम इस अध्याय में त्रिभुज के कुछ प्रमुख गुणों का अध्ययन करेंगे।

त्रिभुज के कुछ प्रमुख गुण:

(i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

(ii) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(iii) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ca}$

(iv) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

(v) $a = b\cos C + c\cos B$

(vi) $b = a\cos C + c\cos A$

(vii) $c = a\cos B + b\cos A$

(viii) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ix) $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ca}}$

(x) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

(xi) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(xii) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

(xiii) $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

(xiv) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(xv) $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

(xvi) $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

(xvii) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin C\ \sin A}{\sin B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2\sin A\cdot\sin B}{\sin C}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin B.\sin C}{\sin A}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{\Delta}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

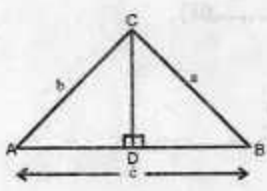
अब हम इन गुणों (सम्बन्धों) को ज्यामितीय या बीजगणितीय विधि से सिद्ध करेंगे।

कोण-भुजा संबंध [त्रिभुज का ज्या सूत्र (sine formula)]:

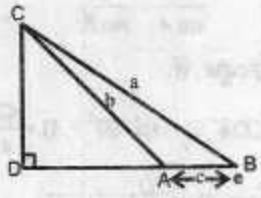
किसी त्रिभुज में कोणा के sines सम्मुख भुजाओं के समानुपाती होते है।

(अर्थात् $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin b}{b} = \frac{\sin c}{c}$)

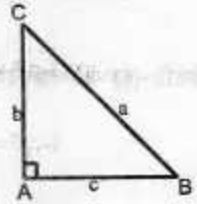
प्रमाण:



आकृति-12(i)



आकृति-12(ii)



आकृति-12(iii)

मानलें कि A B C एक न्यूनकोण, अधिककोण और समकोण त्रिभुज है जिनका कोण A क्रमशः न्यूनकोण, अधिककोण या समकोण है।C से CD लम्ब आधार AB पर डालें। (अधिककोण में आधार को पीछे बढ़ाकर लम्ब डालें, समकोण में लम्ब CA के संपाती होगा।)

स्थिति-(I) न्यूनकोण त्रिभुज में:

$$\triangle ABC, \text{ में, } \sin A = \frac{CD}{AC}$$

$$= \frac{CD}{b}$$

$$\therefore b\sin A = CD \qquad \text{.....(i)}$$

पुनः $\triangle BCD$ में, $\sin B = \frac{CD}{CB}$

या $\sin B = \frac{CD}{a}$

या $a\sin B = CD \qquad$ .....(ii)

समीकरण (i) और (i) से,

$$b\sin A = a\sin B$$

या $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \qquad$ .....(iii)

स्थिति-(ii) अधिककोण त्रिभुज में:

$$\triangle CDA \text{ में, } \sin(180^0 - A) = \frac{CD}{AC}$$

या, $(+\sin A) = \frac{CD}{b}$

या, $CD = b\sin A$ .....(iv)

पुनः $\triangle CDB$ में, $\sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{a}$

$\therefore CD = a\sin B$ .....(v)

समीकरण (iv) और (v) से,

$$b\sin A = a\sin B$$

या, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ .....(vi)

स्थिति-(iii) समकोण त्रिभुज में:

$$\sin B = \frac{b}{a}$$

या, $\frac{a}{1} = \frac{b}{\sin B}$

या, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ($\because \sin A = \sin 90^0 = 1$)

अतः किसी भी त्रिभुज में,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$ .....(vii)

इसी प्रकार B से AC पर लम्ब डाल कर सिद्ध कर सकते हैं कि.....

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$ .....(viii)

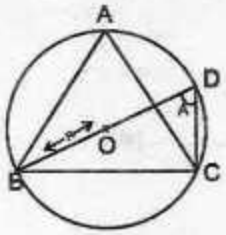
अतः किसी भी त्रिभुज में-

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

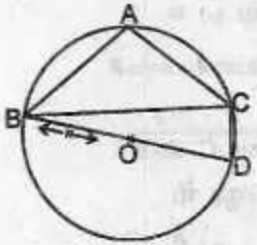
या, $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ .....सूत्र

द्वितीय विधि

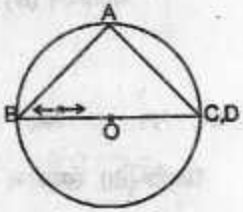
मानलें कि ABC एक त्रिभुज हैं जिसमें $\angle A$ क्रमशः न्यूनकोण, अधिककोण या समकोण है। इस त्रिभुज के बाहर एक परिगत वृत्त खीचें। मानलें कि उसका केन्द्र O तथा उसकी त्रिज्या R है। B O को बढ़ाएँ जो परिधि से D पर मिलें। C D को मिलावें।



आकृति-13(i)



आकृति-13(ii)



आकृति-13(iii)

(समकोण त्रिभुज में C तथा D सपाती होंगे)

स्थिति-(i) न्यूनकोण त्रिभुज में.....

$\angle BAC = \angle BDC = A$ (एकही वृत्तखंड के कोण)

ΔBDC में $\angle C = 90^0$ (अर्द्ध वृत्त के कोण)

अब ΔBDC समकोण में,

$$\sin BDC = \frac{BC}{BD}$$

या, $$\sin A = \frac{a}{2R}$$

या, $$\frac{a}{\sin A} = 2R \quad \text{.....(i)}$$

स्थिति-(ii) अधिककोण त्रिभुज में.....

$\angle BDC = 180^0 - A$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं)

$\angle BCD = 90^0$ (अर्द्धवृत्त के कोण)

अब समकोण ΔBCD में,

$$\sin BDC = \frac{BC}{BD}$$

या $\sin(180^\circ - A) = \frac{a}{2R}$

या, $\sin A = \frac{a}{2R}$

या, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .....(ii)

स्थिति-(iii) समकोण त्रिभुज में.....

समकोण त्रिभुज ABC में,

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1 = \frac{BC}{BC} = \frac{a}{2R}$$

$(\because BC = 2R)$

या, $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .....(iii)

अत: किसी भी त्रिभुज में

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

इसी प्रकार CO तथा BO को मिलाकर सिद्ध कर सकते हैं कि-

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

अत: किसी भी त्रिभुज में,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$ .....(सूत्र)

किसी त्रिभुज में एक कोण और तीनों भुजाओं के बीच का संबंध:

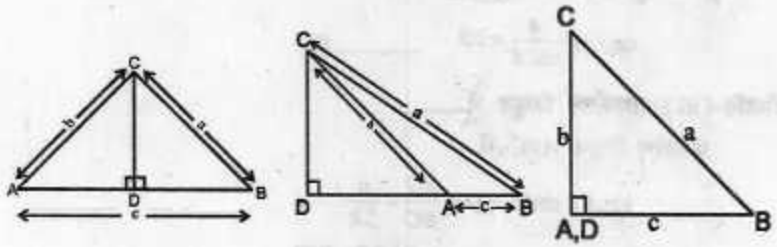
सिद्ध करें कि-

(i) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

(ii) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

(iii) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

प्रमाण:



आकृति-14(i) आकृति-14(ii) आकृति-14(i)

मानलें कि किसी त्रिभुज ABC में क्रमशः न्यून कोण, अधिक कोण या समकोण हैं। C से CD लम्ब भुजा AB पर डालें (अधिक कोण त्रिभुज में लम्ब BA को बढ़ाकर डालें, समकोण त्रिभुज में लम्ब, भुजा CA का संपाती होगा)।

स्थिति-(I) न्यून कोण त्रिभुज में-

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$
$$= (AB - AD)^2 + CD^2$$
$$= AB^2 - 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB.AD$$
$$(\because AD^2 + CD^2 = AC^2)$$

या, $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos A$

$$(\because \Delta ACD \text{ में } \cos A = \frac{AD}{b})$$

या $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

या $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

स्थिति-(II) अधिक कोण त्रिभुज में-

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$
$$= (AB + AD)^2 + CD^2$$
$$= AB^2 + 2AB.AD + AD^2 + CD^2$$
$$= AB^2 + 2AB.AD + AC^2$$

या $a^2 = b^2 + c^2 + 2c.AD$

$\because \Delta DAC$ में,

$$\cos(180^0 - A) = \frac{AD}{AC}$$

या $(-)\cos A = \frac{AD}{b}$

या, $AD = -b\cos C$

इस AD का मान ऊपर रखने पर

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

या, $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$

या, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - ^2}{2bc}$

स्थिति-(III) समकोण त्रिभुज में,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

या, $a^2 = c^2 + b^2$

या, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\left(\because \angle A = 90^0 \, or \cos A = \cos 90^0 = 0 \text{ या } -2bc\cos A = 0\right)$$

या, $2bc\cos A = b^2 + c^2$ या $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

इस तरह आपने देखा कि किसी भी त्रिभुज में-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

या, $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

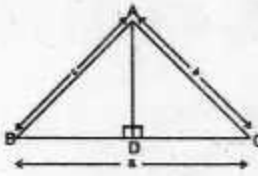
उपरोक्त विधि से $\angle B$ या $\angle C$ को क्रमशः न्यून कोण, अधिक कोण या समकोण मानकर छात्र स्वयं $\cos B$ तथा $\cos C$ का मान प्राप्त करें।

किसी त्रिभुज में तीनों भुजाओं और दो कोणों के बीच का संबंध:

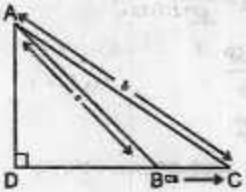
सिद्ध करें कि-

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

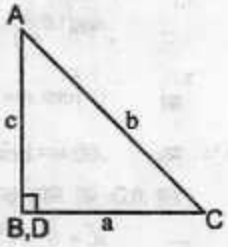
प्रमाण:



आकृति-15(i)



आकृति-15(ii)



आकृति-15(iii)

मानलें कि ABC क्रमशः न्यूनकोण अधिक कोण या समकोण त्रिभुज हैं, A से AD लम्ब आधार BC पर डालें (अधिक कोण में लम्ब CB को बढ़ाकर डालें, समकोण त्रिभुज में लम्ब AB का संपाती होगा।)

स्थिति-(I) न्यून कोण त्रिभुज में,

$$BC = BD + DC$$

या, $$a = c\cos B + b\cos C$$

$$(\because \cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{C})$$

या, $$BD = c\cos B$$

तथा $$\cos C = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{b}$$

या, $$DC = b\cos C)$$

या, $$a = b\cos C + c\cos B$$

स्थिति-(ii) अधिक कोण △ में,

$$\cos(180^\circ - B) = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{C}$$

या, $(-)\cos B = \frac{BD}{C}$

या, $BD = -c\cos B$ .....(i)

पुनः $\cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{b}$

या, $C = b\cos C$ .....(ii)

अब $a = BC = CD - BD = b\cos C - (-c\cos B)$

या, $a = b\cos C + c\cos B$ $(\because \cos B = \cos 90^\circ = 0$
$\therefore c\cos B = 0)$

स्थिति-(iii) समकोण △ में,

$$\cos C = \frac{a}{b}$$

या, $a = b\cos c$

या, $a = b\cos c + c\cos B$

अतः किसी भी त्रिभुज में-

$$a = b\cos C + c\cos B$$

इसी तरह b तथा c का मान प्राप्त करें। यहाँ यह ध्यान दें कि यदि b का मान ज्ञात करना है तब त्रिभुज के नामकरण में B को ऊपर रखें तथा AC को आधार बनावें।

अभी आपने त्रिभुज के Cosines-नियम के दो रूपों का अध्ययन किया है। नीचे आप देखेंगे कि ये दोनों रूपों में से प्रत्येक एक-दूसरे की मदद से प्राप्त किये जा सकते हैं। साथ ही sines-सूत्र की मदद से भी ये प्राप्त किए जा सकते हैं। इन्हें हम बारी-बारी से सिद्ध करेंगे।

1. $\because$ $a = b\cos c + c\cos B$ .....(i)

तथा $b = a\cos C + c\cos A$ .....(ii)

समीकरण (i) को a से तथा (iii) को b से गुणा करने पर,

$$a^2 = ab\cos C + ac\cos B$$ .....(iii)

$b^2 = ab\cos C + bc\cos A$ .....(iv)

(iii) और (iv) को जोड़ने पर,

$a^2 + b^2 = 2ab\cos C + C(a\cos B + b\cos A)$

या, $a^2 + b^2 = 2ab\cos C + C^2 \left(\because a\cos B + b\cos A = C\right)$

या, $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$

या, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ .....सूत्र

इस तरह द्वितीय रूप के cosines-सूत्र से प्रथम रूप के cosines-सूत्र प्राप्त किया जा सकते हैं।

2. $\because \quad \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ तथा $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

अब $b\cos C + c\cos B$

$= b \times \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \times \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$= \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

$= \dfrac{a^2 + b^2 - c^2 + a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \dfrac{2a^2}{2a} = a$

इस तरह cosines-सूत्र के प्रथम रूप से इसके रूप प्राप्त किए जा सकते हैं।

Sines-सूत्र से Cosines-सूत्र प्राप्त करना:

किसी त्रिभुज में $A + B + C = \pi$

या, $A = \pi - (B + C)$

या, $\sin A = \sin(B + C)$

या, $\sin A = \sin B.\cos C + \cos B.\sin C$

या, $\dfrac{a}{2R} = \dfrac{b}{2R}\cos C + \cos B \times \dfrac{C}{2R}$

$\left(\because \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R\right)$

या, $a = b\cos C + c\cos B$

इसी प्रकार, $b = a\cos C + c\cos A$

तथा $c = a\cos B + b\cos A$

इन तीनों सूत्रों से पूर्व की तरह Cosines- सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं।

अर्ध कोणों का त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना

(To find trigonometric ratios of half angles):

यहाँ हम भुजाओं के रूप में अर्ध कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात को व्यक्त करेंगे।

1. सिद्ध करें कि-

(i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

(ii) $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

(iii) $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ (जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2}$)

प्रमाण: आप जानते हैं कि-

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1-\cos A$$

$$= 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (\cos A \text{ का मान रखने पर})$$

$$= \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

या, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

या, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a+b+c-2c).(a+b+c-2b)}{2bc}$

या, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc}$

या, $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$

या, $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$\because A<180^\circ;\ \because \frac{A}{2}<90^\circ$

अत: $\sin\frac{A}{2}$ धनात्मक होगा।

इस कारण ऋणात्मक मान को छोड़ने पर,

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

पुन: $2\sin^2\frac{B}{2}=1-\cos B$

$$=1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}$$

$$=\frac{(2s-2a)(2s-2c)}{2ac}$$

या, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

इसी प्रकार $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

2. सिद्ध करें कि-

(i) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(ii) $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

(iii) $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

प्रमाण: 2 (i) आप जानते हैं कि-

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-(a)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c+a-2a)}{2bc}$$

या, $2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2s(s-a)}{bc}$

या, $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$

या, $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}$ $\quad\because A<180^0$; या $\frac{A}{2}<90^0$

$\therefore \cos\frac{A}{2}$ का मान धनात्मक होगा।

$\therefore \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

छात्र स्वयं $2\cos^2\frac{B}{2}=1+\cos B$ तथा $2\cos^2\frac{C}{2}=1+\cos C$ सूत्रों की मदद से $\cos\frac{B}{2}$ तथा $\cos\frac{C}{2}$ का मान प्राप्त करें।

3. सिद्ध करें कि-

(i) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

(ii) $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

(iii) $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

प्रमाण: 3 (i) $\tan^2\frac{A}{2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$

$$=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

या, $$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}}{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

या, $$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2s(2s-2a)}$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$$

या, $$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$(\because A<180^0;$ या $\frac{A}{2}<90^0)$

$\therefore \tan\frac{A}{2}$ का मान धनात्मक होगा। अतः ऋणात्मक मान को छोड़ दें।)

इसी प्रकार, $\tan\frac{B}{2}$ तथा $\tan\frac{C}{2}$ का मान ज्ञात करें।

4. सिद्ध करें कि-

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

प्रमाण:

$$\cot^2\frac{A}{2}=\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{1+\cos A}{1-\cos A}$$

$$=\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc-b^2-c^2+a^2}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2-(b-c)^2}$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(a+b-c)(a-b+c)}$$

$$=\frac{2s.(2s-2a)}{(2s-2c)(2s-2b)}$$

या, $\cot^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}$

या, $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ (ऋणात्मक मान को अमान्य करते हुए)

इसी प्रकार $\cot\frac{B}{2}$ तथा $\cot\frac{C}{2}$ का मान ज्ञात करें।

त्रिभुज के कोण के sine का मान भुजाओं के पदों में ज्ञात करना:

सिद्ध करें कि-

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

प्रमाण:

$$\because \sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

अब $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ तथा $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ का मान रखने पर,

$$\sin A = 2.\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

इसी प्रकार, $\sin\frac{B}{2}$ तथा $\sin\frac{C}{2}$ का मान प्राप्त करें।

$\tan\frac{B-C}{2}$ का मान ज्ञात करना:

सिद्ध करें कि:

(i) $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(ii) $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cdot\cot\frac{B}{2}$

(iii) $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

हल: दायाँ पक्ष $= \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

$$= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin B + 2R\sin C} \times \cot\frac{A}{2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

$$= \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} \times \cot\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}} \times \cot\frac{A}{2}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}} \times \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

(जब $A+B+C=180^0$ तब $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$

तथा $\sin\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2}$)

$$= \tan\frac{B-C}{2} = \text{बायाँ पक्ष}$$

इसी प्रकार अन्य दो को सिद्ध करें।

उपरोक्त सूत्र को नेपियर (Napier) का tangent नियम भी कहते हैं।

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करना:

जबकि (i) दो भुजाएँ एवं उनके बीच के कोण ज्ञात हों।

(ii) तीनों भुजाएँ ज्ञात हों।

(iii) तीनों कोण एवं कोई एक भुजा ज्ञात हों।

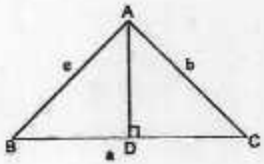
(i) **सिद्ध करें कि त्रिभुज का क्षेत्रफल**

$$(\Delta) = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

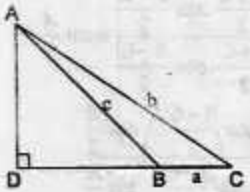
हल: आकृति में A B C क्रमशः न्यून कोण, अधिक कोण एवं समकोण त्रिभुज हैं। A से AD लम्ब आधार BC पर डालें।

स्थिति-I न्यून कोण त्रिभुज में-

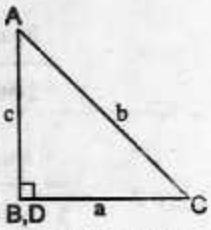
$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } (\Delta) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$



आकृति-16(i)



आकृति-16(ii)



आकृति-16(iii)

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC \sin C \left(\because \sin C = \frac{AD}{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

स्थिति-II अधिक कोण त्रिभुज में:

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल } (\Delta) = \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AC \sin C \left(\because \sin C = \frac{AD}{AC} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b \sin C$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

स्थिति-III समकोण त्रिभुज में:

ΔABC का क्षेत्रफल $(\Delta) = \frac{1}{2} \times BC \times AB$

$$= \frac{1}{2} \times a \times c$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b \sin C \left(\because \sin C = \frac{c}{b} \right)$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

अत: किसी त्रिभुज में $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$= \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{(क्यों?)}$$

(ii) सिद्ध करें कि:

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R}$$

हल: $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$= \frac{1}{2} ab 2 \sin \frac{C}{2} . \cos \frac{C}{2}$$

$$= ab \sin \frac{C}{2} . \cos \frac{C}{2}$$

$$= ab \times \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \times \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$= \frac{ab}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

पुन: $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$

$$= \frac{1}{2}ab\frac{C}{2R}\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

$$= \frac{abc}{4R}$$

(iii) सिद्ध करें कि:

$$\Delta = \frac{1}{2}b^2\frac{\sin C.\sin A}{\sin B} = \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B.\sin C}{\sin A}$$

$$= \frac{1}{2}c^2\frac{\sin A.\sin B}{\sin C}$$

हल: $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$

$$= \frac{1}{2}b.\frac{b\sin C}{\sin B} \times \sin A\left(\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}\right)$$

$$= \frac{1}{2}b^2\frac{\sin C.\sin A}{\sin B}$$

इसी प्रकार $\Delta = \frac{1}{2}\frac{a^2\sin B.\sin C}{\sin A} = \frac{1}{2}\frac{c^2\sin A.\sin B}{\sin C}$ को स्वयं सिद्ध करें।

कुछ अन्य सूत्र:

सिद्ध करें कि:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta} = \frac{\Delta}{s(s-a)}$$

$$\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-a)(s-c)}{\Delta} = \frac{\Delta}{s(s-b)}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta} = \frac{\Delta}{s(s-c)}$$

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{\Delta}{(s-b)(s-c)} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$$

$$\cot\frac{B}{2} = \frac{\Delta}{(s-a)(s-c)} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\Delta}{(s-a)(s-b)}=\frac{s(s-c)}{\Delta}$$

हल: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}\times\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\sqrt{(s-b)^2(s-c)^2}}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

इसी प्रकार, $\tan\frac{B}{2}$ तथा $\tan\frac{C}{2}$ के संबंध को स्वयं सिद्ध करें।

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)\times(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c).(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{\Delta}{(s-b)(s-c)}$$

पुन: $\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s)(s-a)}{(s-b).s(s-a)}}$$

$$=\frac{s(s-a)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{s(s-a)}{\Delta}$$

इसी प्रकार, $\cot\frac{B}{2}$ तथा $\cot\frac{C}{2}$ के संबंध को सिद्ध करें।

उदाहरण 1: किसी त्रिभुज, A B C में a = 17, b = 21 तथा c =34, हो तो $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}$ और $\tan\frac{C}{2}$ ज्ञात करें।

हल: यहाँ $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+21+34}{2} = 36$

अब $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

$$= \sqrt{\frac{(36-21)(36-34)}{21\times 34}}$$

$$= \sqrt{\frac{15\times 2}{21\times 34}} = \sqrt{\frac{5}{119}}$$

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$= \sqrt{\frac{36\times 15}{34\times 17}} = \frac{3}{17}\sqrt{30}$$

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$= \sqrt{\frac{19\times 15}{36\times 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{95}{6}}$$

उदाहरण 2: सिद्ध करें कि

$$(b-c)\cos\frac{A}{2} = a\sin\frac{B-C}{2}$$

हल: बायाँ पक्ष $= (b-c)\cos\frac{A}{2}$

$$= (2R\sin B - 2R\sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

$$= 2R(\sin B - \sin C)\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2R.2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2R.2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}$$

$$= 2R\sin A.\sin\frac{B-C}{2} = a\sin\frac{B-C}{2} =$$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 3: यदि $B = 45^0, C = 75^0$ तथा $b = 20$ सेमी तो a ज्ञात करें।

हल: अब $A = 180^0 - B - C = 60^0$

$$\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

या, $$a = \frac{b}{\sin B} \times \sin A$$

$$= \frac{20}{\sin 45^0} \times \sin 60^0$$

$$= \frac{20}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 10\sqrt{6}$$ सेमी।

उदाहरण 4: यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी, 10 सेमी तथा 14 सेमी हों तो सबसे बड़ा कोण निकालें।

हल: सबसे बड़ी भुजा के सामने को कोण सबसे बड़ा होगा।

मान लें कि $a = 6$ सेमी

$b = 10$ सेमी

$c = 14$ सेमी

$\therefore \angle C$ सबसे बड़ा कोण होगा।

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 100 - 196}{2 \times 6 \times 10} = \frac{-60}{120}$$

$$= -\frac{1}{2} = \cos 120^0$$

या, $c = 120^0$

उदाहरण 5: $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$

हल:

$$= \frac{(2R\sin A)^2 - (2R\sin B)^2}{(2R\sin C)^2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R\right)$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\sin^2 C}$$

$$= \frac{\sin(A-B)}{\sin C}$$

$$(\because A+B+C = 180^0 \, then, \sin(A+B) = \sin C)$$

$$= \frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}$$

उदाहरण 6: सिद्ध करें कि-

$$\Delta = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A}$$

हल: दायाँ पक्ष $= \frac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \frac{2bc}{4\cot A}$

$$= \cos A \times \frac{bc}{\frac{2\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{1}{2} bc.\sin A$$

$= \Delta =$ बायाँ पक्ष

उदाहरण 7: किसी त्रिभुज के कोणों के Cosines सम्मुख भुजाओं के समानुपाती हैं, तो सिद्ध करें कि त्रिभुज समबाहु है।

हल: $\because \frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$

या, $\frac{\cos A}{2R\sin A}=\frac{\cos B}{2R\sin B}=\frac{\cos C}{2R\sin c}$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\right)$$

या, $\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\cos B}{\sin B}=\frac{\cos C}{\sin C}$

या, $\cot A=\cot B=\cot C$

या, $A=B=C$

अत: त्रिभुज समबाहु है।

उदाहरण 8. किसी त्रिभुज A B C में, $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$ तो, सिद्ध करें कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

हल: $a\tan A+b\tan B=(a+b)\tan\frac{A+B}{2}$

या, $a\tan A-a\tan\frac{A+B}{2}=b\tan\frac{A+B}{2}-b\tan B$

या, $a\left\{\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\right\}=b\left\{\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\frac{\sin B}{\cos B}\right\}$

या, $a\frac{\sin A.\cos\frac{A+B}{2}-\cos A.\sin\frac{A+B}{2}}{\cos A.\cos\frac{A+B}{2}}$

$$=b\frac{\sin\frac{A+B}{2}.\cos B-\sin B.\cos\frac{A+B}{2}}{\cos B.\cos\frac{A+B}{2}}$$

या, $a\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos A}=b\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos B}$ $\left(\because \cos\frac{A+B}{2}\neq 0\right)$

या, $\sin\frac{A-B}{2}\left\{\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}\right\}=0$

या, तो $\sin\frac{A-B}{2}=0$

या, $\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=0$

यदि, $\sin\frac{A-B}{2}=0$

तब, $\frac{A-B}{2}=0$

या, $A-B=0$

या, $A=B$

यदि $\frac{a}{\cos A}-\frac{b}{\cos B}=0$

तब $\frac{2R\sin A}{\cos A}-\frac{2R\sin B}{\cos B}=0$

या, $\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}=0$

या, $\tan A=\tan B$

या, $A=B$

दोनों स्थितियों में $A=B$.

उदाहरण 9: किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध करें कि-

$$\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}$

$=\frac{1-2\sin^2 A}{a^2}-\frac{1-2\sin^2 B}{b^2}$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \left(\frac{2\sin^2 A}{a^2} - \frac{2\sin^2 B}{b^2} \right]$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - 2\left[\frac{\sin^2 A}{a^2} - \frac{\sin^2 B}{b^2} \right)$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - 2\left\{ \frac{\sin^2 A}{a^2} - \frac{\sin^2 B}{b^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - 2(0) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 10: यदि किसी त्रिभुज A B C में $\angle C = 90^0$

तो सिद्ध करें कि-

$$\sin(A-B) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

हल: $\because \angle C = 90^0; \therefore \angle A + \angle B = 90^0$

अब दायाँ पक्ष $= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{(2R\sin A)^2 - (2R\sin B)^2}{(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2}$$

$$\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \right)$$

$$= \frac{\sin^2 A - \sin B^2}{\sin^2 A + \sin^2 B}$$

$$= \frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin^2 A + \sin^2(90-A)} \quad (\because \angle B = 90^0 - A)$$

$$= \frac{\sin 90^0.\sin(A-B)}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$= \sin(A-B) \quad (\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1)$$

= बायाँ पक्ष

उदाहरण 11: यदि किसी त्रिभुज A B C में कोणों का अनुपात 3 : 4 : 5 हो, तो a : b : c ज्ञात करें।

हल: मान लें कि A, B तथा C कोण के मान क्रमशः $3x, 4x, 5x$ हैं।

$\therefore 3x+4x+5x=180^\circ$

या, $x=15^\circ$

$\therefore A=45^\circ, B=60^\circ$ और $C=75^\circ$

अब, $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=\sin 45^\circ:\sin 60^\circ:\sin 75^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$=2:\sqrt{6}:\sqrt{3}+1$

उदाहरण 12: यदि किसी त्रिभुज A B C में $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, तब A का मान ज्ञात करें।

हल: $\because (a+b+c)(b+c-a)=3bc$

या, $2s(b+c+a-2a)=3bc$ जहाँ $(a+b+c=2s)$

या, $4s(s-a)=3bc$

या, $\frac{s(s-a)}{bc}=\frac{3}{4}$

या, $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

या, $\cos\frac{A}{2}=\cos 30^\circ$ या $\cos 150^\circ$ या, $A=60^\circ$ या 300°

किसी Δ में $A=300^\circ$ संभव नहीं हैं। $\therefore A=60^\circ$

उदाहरण 13: किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि-

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\frac{a-b}{c}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin C}$

$=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$

$$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}}$$

$\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$ से भाग देने पर,

$$= \frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 14: किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि

$$(b^2-c^2)\sin^2 A+(c^2-a^2)\sin^2 B+(a^2-b^2)\sin^2 C=0$$

हल: बायाँ पक्ष $=(b^2-c^2)\sin^2 A+(c^2-a^2)\sin^2 B+(a^2-b^2)\sin^2 C$

मानें कि, $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=k$

$\because \sin A = ak$

$\sin B = bk$

$\sin C = ck$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=(b^2-c^2)a^2k^2+(c^2-a^2)b^2k^2+(a^2-b^2)c^2k^2$

$=a^2b^2k^2-a^2c^2k^2+b^2c^2k^2-a^2b^2k^2+a^2c^2k^2-b^2c^2k^2$

$=0=$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 15: किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि

(i) $\frac{a+b-c}{a+b+c}=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$

(ii) $2\left[a\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{A}{2}\right]=c+a-b$

हल: (i) दायाँ पक्ष $=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)(s-c)}{s^2(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{s-c}{s}=\frac{\frac{a+b+c}{2}-c}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$=\frac{a+b-c}{a+b+c}=$$ बायाँ पक्ष।

(ii) बायाँ पक्ष $=2\left\{a\frac{(s-a)(s-b)}{ab}+c\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\right\}$

$$=2\left\{\frac{(s-a)(s-b)}{b}+\frac{(s-b)(s-c)}{b}\right\}$$

$$=2(s-b)\left\{\frac{s-a+s-c}{b}\right\}$$

$$=2\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c-a-c}{2}\right)$$

$$=(a+c-b)(1)=(c+a-b)=$$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 16: किसी त्रिभुज A B C में सिद्ध करें कि-

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

हल: बायाँ पक्ष $=\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\times a}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac\times b}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\times c}$$

$$=\frac{1}{2abc}\left\{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2\right\}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=$$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 17: किसी त्रिभुज A B C में सिद्ध करें कि-

$$\frac{\cos B}{\cos C}=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$$

हल: दायाँ पक्ष $=\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}$

$$=\frac{a\cos B+b\cos A-b\cos A}{a\cos C+c\cos A-c\cos A}$$

$$=\frac{a\cos B}{a\cos C}=\frac{\cos B}{\cos C}=$$ बायाँ पक्ष

उदाहरण 18: सिद्ध करें कि-

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$$

हल: बायाँ पक्ष $=\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$

$$=\frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A}.2\sin A\cos A+\frac{\sin^2 C-\sin^2 A}{\sin^2 B}\times 2\sin B.\cos B$$

$$+\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin^2 C}\times 2\sin C.\cos C$$

$$=\frac{\sin(B+C).\sin(B-C)}{\sin A}\times 2\cos A+\frac{\sin(C+A).\sin(C-A)}{\sin B}\times 2\cos B$$

$$+\frac{\sin(A+B).\sin(A-B)}{\sin C}\times 2\cos C$$

$$=2\cos A.\sin(B-C)+2\cos B.\sin(C-A)+2\cos C.\sin(A-B)$$

$$=2\cos A\left\{\sin B.\cos C-\cos B.\sin C\right\}+2\cos B$$

$$\left\{\sin C.\cos A-\cos C.\sin A\right\}$$

$$+2\cos C\left\{\sin A.\cos B-\cos A.\sin B\right\}$$

$=0$ दायाँ पक्ष।

उदाहरण 19: यदि $\frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{c-b}{c}$ तो सिद्ध करें कि $\angle A=60^\circ$

हल: $\because \frac{\tan A-\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{c-b}{c}$

या, $\frac{\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}}=\frac{c-b}{c}$

या, $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{\sin C-\sin B}{\sin C}$

या, $\sin(A-B)=\sin C-\sin B$

$(\because \sin(A+B)=\sin C\neq 0)$

या, $\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin B$

या, $\sin(A+B)-\sin(A-B)=\sin B$

या, $2\cos A.\sin B=\sin B \qquad (\because \sin B\neq 0)$

या, $2\cos A=1$

या, $\cos A=\frac{1}{2}$

या, $A=60^\circ$

उदाहरण 20: यदि $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$, तब त्रिभुज या तो समकोण होगा या समद्विबाहु।

हल: $\because \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}$

या, $\frac{a^2+b^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-a^2+b^2}=\frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{\sin(A+B)-\sin(A-B)}$

या, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{2\sin A.\cos B}{2\cos A.\sin B}$

या, $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}=\frac{2\sin A.\cos B}{2\cos A.\sin B}$

या, $\sin A.\sin B(\sin 2A-\sin 2B)=0$

या, $\sin 2A - \sin 2B = 0 \quad (\because \sin A \neq 0, \sin B \neq 0)$

या, $2\cos(A+B).\sin(A-B) = 0$

$\therefore \cos(A+B) = 0$

या, $\sin(A-B) = 0$

जब, $\cos(A+B) = 0$

तब, $A+B = 90^0$

या, $C = 180^0 - 90^0 = 90^0$

जब, $\sin(A-B) = 0$

तब, $A-B = 0$

या, $A = B$

$\therefore$ या तो त्रिभुज समकोण होगा या समद्विबाहु।

उदाहरण 21: यदि किसी त्रिभुज A B C की ऊँचाइयाँ क्रमशः h_1, h_2, h_3 हों, तो सिद्ध करें कि $\dfrac{1}{h_1^2}+\dfrac{1}{h_2^2}+\dfrac{1}{h_3^2} = \dfrac{\cot A+\cot B+\cot C}{\Delta}$

हल: $\Delta = \dfrac{1}{2}ah_1 = \dfrac{1}{2}bh_2 = \dfrac{1}{2}ch_3$

$\therefore \quad \dfrac{1}{h_1} = \dfrac{a}{2\Delta}$

$\dfrac{1}{h_2} = \dfrac{b}{2\Delta}$

$\dfrac{1}{h_3} = \dfrac{c}{2\Delta}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= \dfrac{1}{h_1^2}+\dfrac{1}{h_2^2}+\dfrac{1}{h_3^2} = \dfrac{1}{4\Delta^2}(a^2+b^2+c^2)$

पुनः दायाँ पक्ष $= \dfrac{\cot A+\cot B+\cot C}{\Delta}$

$= \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}\right)$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca\sin B} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab\sin C}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2.2\Delta} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2.2\Delta} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2.2\Delta}\right)$$

$$= \frac{1}{4\Delta^2}(a^2+b^2+c^2)$$

प्रश्नावली–10

1. किसी त्रिभुज A B C में शेष भागों (भुजाओं तथा कोणों) को ज्ञात करें।

   (i) $a=1, b=\sqrt{3}, A=30^0$ (ii) $b=3\sqrt{2}, c=2\sqrt{3}, C=45^0$

   (iii) $b=\sqrt{6}, c=2\sqrt{3}, B=30^0$ (iv) $a=2\sqrt{3}, c=3\sqrt{2}, C=60^0$

   (v) $b=3, c=6, B=30^0$ (vi) $a=2, b=4, C=60^0$

2. किसी त्रिभुज A B C में $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6}, \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ हो, तो $\tan\frac{C}{2}$ का मान बतावें।

3. किसी त्रिभुज A B C में सिद्ध करें कि

   (i) $a\sin A - b\sin B = c\sin(A-B)$

   (ii) $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$

   (iii) $a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$

   (iv) $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

   (v) $a\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

   (vi) $a\sin\frac{B-C}{2} = (b-c)\cos\frac{A}{2}$

   (vii) $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$

(viii) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$

(ix) $(b^2-c^2)\cos 2A+(c^2-a^2)\cos 2B+(a^2-b^2)\cos 2C=0$

(x) $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

(xi) $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc$

(xii) $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$

(xiii) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

(xiv) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0$

(xv) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0$

(xvi) $\tan\left(\frac{A}{2}+B\right)=\frac{c+b}{c-b}\tan\frac{A}{2}$

(xvii) $\frac{b^2-c^2}{a^2}=\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$

(xviii) $\frac{b^2+c^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}=\frac{\tan B}{\tan A}$

(xix) $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{c-a\cos B}{b-a\cos C}$

4. यदि $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ हो, तो सिद्ध करें कि $C=60^0$

5. यदि $b+c=2a\cos\frac{b-c}{2}$ हो, तो सिद्ध करें कि $A=60^0$

6. यदि $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ हो, तो सिद्ध करें कि $A=60^0$

7. यदि किसी त्रिभुज A B C में, $2\cos A=\frac{\sin B}{\sin C}$ हो, तो सिद्ध करें कि वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

8. किसी त्रिभुज में $a:b:c=4:5:6$ हो, तो सिद्ध करें कि महत्तम कोण लघुत्तम कोण का दूना है।

9. यदि $a=25, b=52, c=63$, तो $\tan\frac{A}{2}$ तथा का मान बतावें।

10. यदि $a=125, b=123$ और $c=62$ हो तो

(i) $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ तथा

(ii) $\sin A, \cos B, \tan C$ का मान बतावें।

11. किसी त्रिभुज A B C में, सिद्ध करें कि

(i) $(a+b-c)\cot\frac{B}{2}=(a-b+c)\cot\frac{C}{2}$

(ii) $(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$

(iii) $(a+b+c)\sin\frac{A}{2}=2a\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$