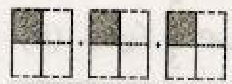
سوالنامہ

1- نیچے کچھ کسری اعداد کے ضرب کے لیے خاکے بنائے گئے ہیں۔ ہر ایک ضرب کو اس کے صحیح خاکہ (تصویر) سے ملائیے:

(i) $3\times\frac{1}{5}$ (a)

(ii) $3\times\frac{1}{2}$ (b) 

(iii) $2\times\frac{2}{3}$ (c)

(iv) $3\times\frac{1}{4}$ (d)

2- نیچے دیئے گئے کسر اعداد کو ضرب کیجیے اور سہل ترین شکل میں لکھیے:

(i) $7\times\frac{4}{5}$ (ii) $3\times\frac{2}{3}$ (iii) $7\times\frac{2}{9}$

(iv) $\frac{1}{3}\times4$ (v) $2\times\frac{6}{7}$ (vi) $\frac{7}{2}\times6$

(vii) $11\times\frac{3}{7}$ (viii) $15\times\frac{3}{5}$ (ix) $11\times\frac{1}{3}$

(x). $10\times\frac{3}{5}$ (xi) $5\times\frac{3}{2}$ (xii) $6\times\frac{1}{6}$

9- مندرجہ ذیل تصویروں کے لیے کسر لکھیے:

(i)

2 کا ---- = ----

(ii)

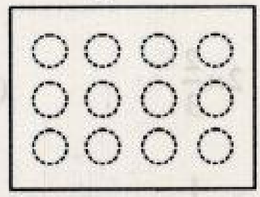
3 کا ---- = ----

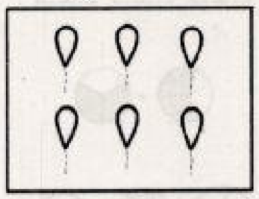
(iii)

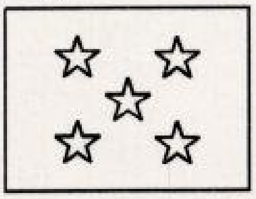
3 کا ---- = ----

4- سایہ دار کیجیے:

(i) دائروں کا $\frac{1}{2}$ حصہ　　(ii) بیلون کا $\frac{2}{3}$ حصہ　　(iii) تاروں کا $\frac{3}{5}$







5- معلوم کیجیے:

(i) $\frac{1}{2}$ کا 26　　(ii) $\frac{1}{2}$ کا 38

(iii) $\frac{2}{3}$ کا 21　　(iv) $\frac{2}{3}$ کا 24

(v) $\frac{3}{4}$ کا 20　　(vi) $\frac{3}{4}$ کا 36

(vii) $\frac{4}{5}$ کا 25　　(viii) $\frac{4}{5}$ کا 30

(ix) $\frac{7}{9}$ کیلوگرام کا 81　　(x) $\frac{4}{7}$ روپیہ کا 14

5- ضرب کیجیے اور مرکب کسر کی شکل میں ظاہر کیجیے:

(i) $3\times5\frac{1}{5}$　　(ii) $4\times6\frac{1}{2}$

(iii) $7\frac{1}{5}\times 5$ (iv) $4\frac{1}{7}\times 21$

(v) $3\frac{1}{4}\times 6$ (vi) $\frac{5}{8}\times 108$

7- سنبل اور فرحان پکنک پر گئے۔ ان کی ماں نے انھیں 5 لیٹر پانی والی ایک بوتل دی۔ سنبل نے کل پانی کا $\frac{3}{5}$ حصہ استعمال کیا۔ باقی پانی فرحان نے پیا۔

(i) سنبل نے کتنا پانی پیا؟

(ii) پانی کی کل مقدار کا کتنا حصہ فرحان نے پیا؟

8- معلوم کریں:

(i) ایک دن کا $\frac{5}{6}$ (گھنٹوں میں) (ii) ایک گھنٹے کا $\frac{2}{3}$ (منٹوں میں)

(iii) ایک ہفتہ کا $\frac{2}{7}$ (دن میں) (iv) ایک کیلوگرام کا $\frac{3}{5}$ (گرام میں)

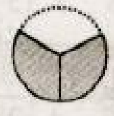
(v) ایک سال کا $\frac{3}{5}$ (دن میں)

9- ایک مستطیل نما آنگن میں $5\frac{1}{4}$ میٹر لمبا اور $1\frac{1}{7}$ میٹر چوڑا ہے۔ تو آنگن کا احاطہ (Perimetre) معلوم کریں۔

2.3.2 کسر کا کسر سے ضرب

آیئے دیکھتے ہیں کہ دو کسروں کا حاصل ضرب، جیسے $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ کیسے معلوم کیا جائے؟

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ کا مطلب ہے $\frac{1}{3}$ کا $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{3}$ کا نصف۔ اسے سمجھنے کے لیے ایک دائرہ کا $\frac{1}{3}$ حصہ لیتے ہیں۔



خاکہ: 2.6

پھر $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ کے لیے اس تہائی حصہ کا نصف کرتے ہیں۔

یہ نصف (A◄) حصہ پورے دائرے کا کتنا حصہ ہے؟

خاکہ : 2.7

یہ معلوم کرنے کے لے پورے دائرہ کو A کے برابر حصوں میں باٹنا پڑے گا۔ ہم پاتے ہیں کہ ایسے چھ حصے ہوتے ہیں اور A اس میں ایک ہے۔ اس لیے $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

کیا $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ بھی $\frac{1}{6}$ ہوگا۔ تصویر بنا کر دیکھیے۔

خاکہ : 2.8

اس طرح ہم پاتے ہیں کہ دو کسروں کا حاصل ضرب = $\dfrac{\text{شمار کنندہ کا حاصل ضرب}}{\text{نسب نما کا حاصل ضرب}}$

مثال کے طور پر: $\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{2\times4}{3\times7}=\frac{8}{21}$

کوشش کریں: (i) $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=?$ (ii) $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=?$

حاصل ضرب کی قیمت:

ہم جانتے ہیں کہ دو مکمل اعداد کا حاصل ضرب ان دونوں اعداد سے بڑا ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر $2\times3=6$ اور $6>3, 6>2$

دو کسروں کو ضرب کر حاصل ضرب کی قیمت کو دیئے گئے کسروں سے موازنہ کیجیے۔

کسروں کا ضرب	حاصل ضرب کے دونوں کسروں سے موازنہ	نتیجہ
$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}<\frac{2}{3}, \frac{8}{15}<\frac{4}{15}$	حاصل ضرب ہر ایک کسر سے کم ہے
$\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}$	$\frac{3}{28}<\frac{1}{4}, \frac{3}{28}<\frac{3}{7}$	

$\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}$		
$\frac{7}{8}\times\frac{2}{5}$		

ہم پاتے ہیں کہ دو خاص کسروں کے حاصل ضرب کی قیمت دونوں کسروں میں سے ہر ایک سے چھوٹی ہوتی ہے۔ جدول کو پورا کر کے اس کی جانچ کیجیے۔

آیئے اب ہم دو عام کسروں کے حاصل ضرب کا تذکرہ کرتے ہیں۔

$\frac{7}{4}\times\frac{7}{3}=\frac{49}{12}$	$\frac{49}{12}>\frac{7}{3},\frac{49}{12}<\frac{7}{4}$	حاصل ضرب ہر ایک کسر سے بڑا ہے
$\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{28}{15}$		
$\frac{7}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{63}{4}$		
$\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}=\frac{21}{12}$		

ہم پاتے ہیں کہ دو کسر عام کے حاصل ضرب کی قیمت ان میں سے ہر ایک کسر سے زیادہ ہے۔

ایسے پانچ اور مثالوں کو بنایئے اور مندرجہ بالا قول کو تصدیق کیجیے۔

آیئے اب ہم ایک کسر عام اور ایک کسر خاص کو ضرب کرتے ہیں۔

مان لیجیے $\frac{4}{3}$ اور $\frac{8}{5}$ کو ضرب کرنا ہے۔

ہم پاتے ہیں کہ $\frac{24}{20}=\frac{3}{4}\times\frac{8}{5}$ یہاں $\frac{24}{20}>\frac{3}{4}$ اور $\frac{24}{20}<\frac{8}{5}$

یعنی حاصل ضرب، کسر عام سے چھوٹا اور کسر خاص سے بڑا ہے۔

$\frac{3}{5}\times\frac{10}{3}$ اور $\frac{2}{7}\times\frac{7}{5}$ کے لیے بھی حاصل ضرب کی جانچ کیجیے۔

سوالنامہ : 2.3

1- ذیل کی قیمت معلوم کیجیے:

(i) $\frac{1}{2}$ کا $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}$ کا $\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{5}{4}$ کا $\frac{1}{4}$

(iv) $\frac{12}{5}$ کا $\frac{1}{5}$ (v) $\frac{6}{4}\times\frac{3}{8}$ (vi) $2\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

(vii) $\frac{3}{5}\times3\frac{4}{7}$ (viii) $9\times\frac{7}{2}$ (ix) $5\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}$

(x) $\frac{7}{9}\times6\frac{2}{5}$

2- کون بڑا ہے؟

(i) $\frac{2}{7}$ کا $\frac{3}{4}$ یا $\frac{2}{7}$ کا $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{6}$ کا $\frac{3}{4}$ یا $\frac{3}{5}$ کا $\frac{5}{8}$

3- بدھ واری اپنے باغیچے میں پانچ چھوٹے پودے ایک قطار میں لگاتی ہے۔ دو لگاتار چھوٹے پودے کے بیچ کی دوری $\frac{3}{4}$ میٹر ہے۔ پہلے اور آخری پودے کے بیچ کی دوری معلوم کیجیے۔

4- شیوانی ایک کتاب کو ہر روز $1\frac{2}{7}$ گھنٹے پڑھتی ہے۔ وہ پوری کتاب کو ایک ہفتہ میں پڑھتی ہے۔ اس کتاب کو پڑھنے میں اس نے کل کتنے گھنٹے لگائی؟

5- ایک اسکوٹر ایک لیٹر پٹرول میں 35 کیلو میٹر کی دوری طے کرتا ہے۔ $3\frac{4}{5}$ لیٹر پٹرول میں یہ اسکوٹر کتنی دوری طے کرے گا؟

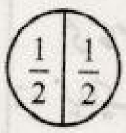
2.4 کسروں کا تقسیم (Division of Fraction)

جواہر کے پاس 9 سینٹی میٹر لمبی کاغذ کی ایک پٹی ہے۔ وہ اس پٹی کو 3 سینٹی میٹر لمبی چھوٹی پٹیوں میں کاٹتا ہے تو وہ $9\div3=3$ پٹیاں حاصل کرے گا۔ اب اگر جواہر 9 سینٹی میٹر لمبائی والی ایک دوسری پٹی کو $\frac{3}{4}$ سینٹی میٹر لمبائی والی چھوٹی پٹیوں میں کاٹنا چاہتا ہے تو اسے $9\div\frac{3}{2}$ پٹیاں حاصل ہوں گی۔ اسی طرح

$\frac{21}{2}$ سینٹی میٹر لمبائی والی پٹی کو $\frac{3}{2}$ سینٹی میٹر لمبائی والی چھوٹی پٹیوں میں کاٹنے پر ہمیں $\frac{21}{13}\div\frac{3}{2}$ ٹکڑے حاصل ہوں گے۔ اسے حل کرنے کے لیے ہمیں ایک مکمل عدد کو کسی کسر سے یا ایک کسر کو دوسرے کسر سے تقسیم دینے کی ضرورت پڑتی ہے۔ آیئے اسے حل کرنے کا طریقہ دیکھیں۔

2.4 کسر سے مکمل عدد کی تقسیم

آیئے $1\div\frac{1}{2}$ معلوم کرتے ہیں۔ اگر ایک سینٹی میٹر لمبی پٹی ہو تو جو اہر اس میں نصف سینٹی میٹر کی کتنی پٹیاں کاٹ سکتا ہے۔ (خاکہ : 2.9) ایسے نصف حصوں کی تعداد $1\div\frac{1}{2}$ ہوگی۔ ایسا دو نصف حصہ ہے پھر ایک اکائی میں نصف۔ نصف دو حصے ہوتے ہیں۔



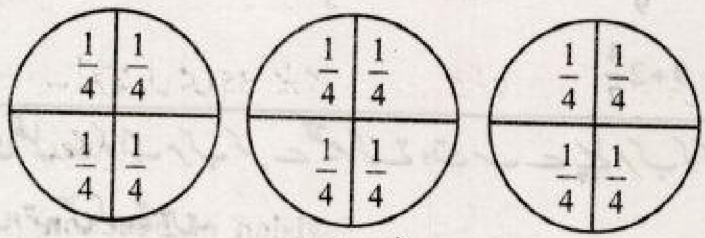
خاکہ : 2.9

اس لیے $1\div\frac{1}{2}=2$ ہوگا ساتھ ہی $1\times\frac{2}{1}=1\times 2=2$

اس لیے $1\div\frac{1}{2}=1\times\frac{2}{1}$ ہوگا۔

اسی طرح $3\div\frac{1}{4}$ یعنی 3 پورے میں کتنا $\frac{1}{4}$ حصہ ہے۔ یہ جاننے کے لیے ہم 3 اکائیوں کو $\frac{1}{4}$ حصوں میں بانٹیں گے اور گنیں گے۔

$\frac{1}{4}$ حصوں کی تعداد = 12 (خاکہ : 2.10)



خاکہ : 2.10

پھر ہم جانتے ہیں کہ $3\div\frac{1}{4}=12$ اور $3\times\frac{4}{1}=12$

اسی طرح $3\div\frac{1}{3}$ اور $3\times\frac{3}{1}$ معلوم کیجیے۔ ہم پاتے ہیں کہ کسر سے مکمل عدد کو تقسیم دینے پر وہی حاصل

تقسیم حاصل ہوتا ہے جو ہم مکمل عدد کو کسر کے ضربی معکوس(Reciprocal) سے ضرب کرنے پر ملتا ہے۔

$\frac{1}{4}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک دوسرے سے بدلنے پر $\frac{4}{1}$ حاصل ہوتا ہے۔ یہی $\frac{1}{4}$ کا ضربی معکوس(Reciprocal) ہے۔ اسی طرح کسی بھی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک دوسرے کے بدلنے سے اس کسر کا ضربی معکوس حاصل ہوتا ہے۔

مندرجہ ذیل حاصل ضرب کو دیکھیے اور خالی جگہوں کو پورا کیجیے:

$8\times\frac{1}{8}=1$ $\qquad$ $\frac{7}{3}\times\frac{3}{7}=$ ....

$\frac{1}{7}\times 7=$ .... $\qquad$ $\frac{3}{4}\times$ .... $=1$

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{6}=1$ $\qquad$ .... $\times\frac{4}{9}=1$

سوچیے:

1- کیا ایک خاص کسر کا ضربی معکوس بھی خاص کسر ہوگا؟

2- کیا ایک عام کسر کا ضربی معکوس procal بھی کسر عام ہوگا؟

خود کر کے دیکھیے: معلوم کیجیے۔

(i) $8\div\frac{2}{5}$ $\qquad$ (ii) $12\div\frac{4}{7}$

(iii) $1\div\frac{8}{9}$ $\qquad$ (vi) $5\div 5\frac{1}{3}$

(v) $9\div 2\frac{4}{7}$

دھیان دیں: کسی مکمل عدد کو ایک مرکب کسر سے تقسیم کرتے وقت سب سے پہلے مرکب کو کسر عام میں بدلتے ہیں، تب حل کرتے ہیں۔

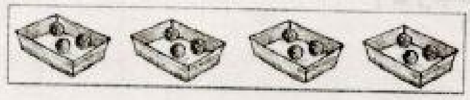
مثال کے طور پر: $3\div 2\frac{2}{5}=3\div\frac{12}{5}$

$$=3\times\frac{5}{12}=\frac{5}{4}$$

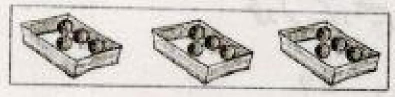
2.4.2 - مکمل عدد سے کسر کی تقسیم:

ہم تقسیم کو دو طرح سے سمجھ سکتے ہیں۔ $12 \div 3$

1- 12 میں تین تین کے کتنے گروپ ہیں؟

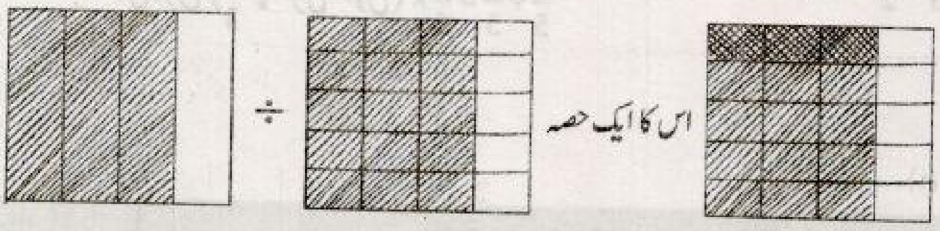


2- 12 چیزوں کو تین لوگوں میں بانٹنے پر ہر ایک کو ملنے والا حصہ



اب $5 \div \frac{3}{4}$ کا تذکرہ کریں:

$5 \div \frac{3}{4}$ یعنی $\frac{3}{4}$ کو 5 حصوں میں بانٹنا اور ہر ایک حصہ کتنا ہے یہ معلوم کرنا ہے۔



یہ حصہ مکمل کا کتنا حصہ ہے۔ معلوم کرنے کے لیے مکمل کے اتنے ہی برابر چھوٹے حصے کیے گئے ہیں۔ اس طرح کل حصے 20 اور سایہ دار حصے 3 ہیں۔ اس $\frac{3}{4}$ کے 5 حصے کرنے پر ہمیں $\frac{3}{20}$ حصہ ہمیں ملے گا۔

اسی طرح $\frac{5}{1} \div \frac{5}{4}$ کی قیمت ہوگی $= \frac{5}{4} \div \frac{5}{1} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$

اسی طرح $\frac{2}{3} \div 5 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

لیکن $2\frac{1}{4} \div 3 = ?$

یہاں مرکب کسر کو مکمل سے تقسیم کرنے کے لیے مرکب کسر کو عام کسر میں تبدیل کرنا ہوگا اس لیے

$$2\frac{1}{4} \div 3 = \frac{9}{4} \div \frac{9}{4} \times \frac{1}{3} \div \frac{3}{4}$$

کوشش کریں:

1. $2\frac{2}{5} \div 3 = ?$
2. $3\frac{3}{5} \div 3 = ?$

2.4.3 -ایک کسر کا دوسرے کسر سے تقسیم:

مثال کے طور پر $\frac{2}{3} \div \frac{5}{6}$

$= \frac{2}{3} \times$ ($\frac{5}{6}$ کا ضربی معکوس)

$= \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$

اسی طرح $\frac{9}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{9}{5} \times$ ($\frac{2}{3}$ کا ضربی معکوس)

$= \frac{9}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{10}$

خود کر کے دیکھیں:

1. $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2} = ?$
2. $2\frac{1}{2} \div \frac{2}{5} = ?$
3. $5\frac{1}{3} \div \frac{9}{2} = ?$

سوالنامہ : 2.4

ا- معلوم کیجیے:

(i) $15 \div \frac{3}{4}$ (ii) $12 \div \frac{5}{6}$ (iii) $9 \div \frac{7}{3}$

(iv) $8 \div \frac{8}{3}$ (v) $3 \div 2\frac{2}{3}$ (vi) $7 \div 3\frac{2}{7}$

2- مندرجہ ذیل کسروں میں سے ہر ایک کا ضربی معکوس(Reciprocal) معلوم کیجیے۔

ضربی معکوس(Reciprocol) کو کسر خاص، کسر عام اور مکمل عدد کی صورت میں درجہ بندی کیجیے۔

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{7}{5}$

(v) $\frac{15}{8}$ (vi) $\frac{1}{5}$ (vii) $\frac{1}{13}$

3- معلوم کیجیے:

(i) $\frac{5}{3}\div 2$ (ii) $\frac{7}{9}\div 5$ (iii) $\frac{7}{13}\div 7$

(iv) $2\frac{1}{3}\div 2$ (v) $4\frac{1}{2}\div 4$ (vi) $3\frac{3}{7}\div 7$

(vii) $5\frac{3}{4}\div 7$ (viii) $3\frac{2}{3}\div 11$

4- معلوم کیجیے:

(i) $\frac{3}{5}\div\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{2}{7}\div\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7}\div\frac{6}{7}$

(iv) $2\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}$ (v) $5\frac{1}{2}\div\frac{11}{3}$ (vi) $\frac{2}{5}\div 2\frac{1}{2}$

(vii) $2\frac{1}{5}\div 3\frac{2}{3}$ (viii) $3\frac{1}{5}\div 2\frac{1}{5}$

5- آدھا درجن کیلوں کی قیمت $7\frac{1}{2}$ ہے تو 1 کیلا کی قیمت معلوم کیجیے:

6- ایک ہوسٹل میں ہر ایک طلبہ روزانہ اوسطاً $1\frac{5}{6}$ لیٹر دودھ لیتا ہے۔ روزانہ کل 308 لیٹر دودھ ہوسٹل میں استعمال ہوتا ہے۔ تو طلبہ کی تعداد معلوم کیجیے۔

7- ایک $15\frac{1}{5}$ میٹر لمبے ربن کے 4 برابر حصے کیا جاتا ہے تو ہر ایک حصے کی لمبائی کیا ہوگی؟

8- $3\frac{1}{4}$ کیلوگرام سیب کی قیمت 130 روپیہ ہے، تو 1 کیلوگرام سیب کی قیمت کیا ہوگی؟

ہم نے سیکھا

1- دو کسر کو ضرب کرنے کے لیے ان کے شمار کنندہ اور نسب نما کو الگ الگ کیا جاتا ہے اور پھر حاصل ضرب کو $\frac{\text{شمار کنندہ کا حاصل ضرب}}{\text{نسب نما کا حاصل ضرب}}$ کی شکل میں لکھتے ہیں۔

-2 کسر آپریٹر ''کا'' کی شکل میں کام کرتا ہے۔ جیسے 2. کا $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے $2\times\frac{1}{2}=1$

-3 (الف) دو خاص کسروں کا حاصل ضرب، ضرب کیے گئے ہر ایک کسر سے کم ہوتا ہے۔

(ب) دو عام کسروں کا حاصل ضرب، ضرب کیے گئے دونوں کسروں میں سے ہر ایک سے بڑا ہوتا ہے۔

(ج) ایک کسر خاص اور ایک کسر عام کا حاصل ضرب کسر خاص سے کم اور کسر عام سے زاید ہوتا ہے۔

-4 ایک کسر کا ضربی معکوس (Reciprocol) شمار کنندہ اور نسب نما کو ایک دوسرے سے بدلنے پر حاصل ہوتا ہے۔

-5 ایسے غیر صفر عدد جن کا باہم حاصل ضرب 1 ہے، ایک دوسرے کے ضربی معکوس عدد کہلاتے ہیں، جیسے 5 و $\frac{1}{5}$ یا $\frac{2}{3}$ اور $\frac{3}{2}$

-6 کسی مکمل یا کسر عدد کو دوسرے مکمل یا کسر عدد سے تقسیم کرنے کے لیے ہم پہلے عدد کو دوسرے عدد کے ضربی معکوس (Reciprocol) سے ضرب کرتے ہیں۔

(i) مکمل کا کسر سے تقسیم $2\div\frac{3}{5}=2\times\frac{5}{3}$

(ii) کسر کا مکمل سے تقسیم $\frac{2}{3}\div 7=\frac{2}{3}\times\frac{1}{7}$

(iii) کسر کا کسر سے تقسیم $\frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}$

S.S.A. 2014-15 (FREE)

باب-3

کسر اعشاریہ (Decimal Fraction)

3.1 - تمہید:

آپ نے پچھلی جماعت میں اعشاریہ کسر کا مطالعہ کیا ہے، جس میں ہم نے اعشاریہ کسر کا موازنہ جوڑ و گھٹاؤ (تفریق) سیکھا ہے۔ اس باب میں ہم اعشاریہ کسروں کے ضرب، تقسیم پر تذکرہ کریں گے۔ لیکن اس سے پہلے پچھلی بنیادی اصولوں کو یاد کرنے کے لیے آیئے کچھ کرتے ہیں۔ نیچے دیئے گئے جدول کو دیکھئے اور خالی جگہوں کو پُر کیجیے:

سیکڑہ	دہائی	اکائی	دسواں	سواں	ہزارواں	عدد
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
1	2	3	4	5	6	123.456.
2	3	4	5	6	7	....
0	4	5	6	7	8	....
5	....	6	7	8	9	506.789
6	7	8	9	0	1	....
....	....	....	....	....	....	890.001
9	0	1	0	0	0	....
3	0	0	2	....	....	....

اوپر کے جدول میں آپ نے اعداد کے دیئے گئے تفصیلی مقامی قیمت سے عدد معلوم کیا۔ اگر عدد دیا گیا ہے تو ان کا دیئے گئے مقامی قیمت بھی معلوم کیا جا سکتا ہے۔ جیسے:

$$256.457 = 2\times100+5\times10+6\times1+4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{100}+7\frac{1}{1000}$$

رشید کی لمبائی 1.67 میٹر ہے اور بدھن کی لمبائی 1.85 میٹر ہے۔ کون زیادہ لمبا ہے؟ یہ جاننے کے لیے ہمیں 1.67 اور 1.85 کا موازنہ کرنے کی ضرورت ہے۔ اس کے لیے سب سے پہلے بائیں جانب سے شروعات کرتے ہیں۔ اس حالت میں دونوں 1 برابر ہے۔ تب ہم دسویں مقام کے ہندسوں کا موازنہ کریں گے۔ چونکہ 6 چھوٹا ہے 8 سے (8 > 6) اس لیے 1.67 ,1.85 سے چھوٹا ہوگا۔ اس لیے رشید کی لمبائی بدھن سے کم ہے۔

اگر دسویں مقام کا ہندسہ بھی برابر ہو، تب سواں مقام کے ہندسہ کا موازنہ کر بڑے چھوٹے عدد کا تعین کریں گے اور اسی طرح ہزارواں اور دس ہزارواں حصہ اور اس سے آگے تک اعشاریہ کسروں کا موازنہ کیا جا سکتا ہے۔

2.34 < 3.45 کیوں کہ ∵ مکمل حصہ 2 < مکمل حصہ 3 سے

2.34 < 2.12 کیوں کہ ∵ مکمل حصہ 2 = مکمل حصہ 2 اور دسواں حصہ 3 > دسواں حصہ 1 سے

اسی طرح اعشاریہ کسر اعداد کے موازنہ کے لیے بائیں سے دائیں کی جانب تب تک بڑھتے جاتے ہیں جب تک ہندسوں میں فرق نہیں آجاتا ہے اور اگر آخری مقام تک ہندسے برابر ہیں تو دونوں اعشاریہ کسر برابر ہوں گے۔

اعشاریہ کسر کا استعمال ہم لہر، لمبائی، دھاتوں کی قیمت اور وقت وغیرہ کی چھوٹی اکائیوں کو بڑی اکائیوں میں تبدیل کرتے وقت کرتے ہیں۔ مثال:

5 پیسے = $\frac{5}{100}$ روپیہ = .05 روپیہ = 0.05 روپیہ

10 سینٹی میٹر = $\frac{10}{100}$ میٹر = .1 میٹر = 0.1 میٹر

12 گرام = $\frac{12}{100}$ کیلوگرام = .012 کیلوگرام = 0.012 کیلوگرام

30 سکنڈ = $\frac{30}{60}$ منٹ = 0.5 منٹ

کوشش کیجیے۔

ذیل کا موازنہ کیجیے:

1. 1.234,2.345
2. 1.234,1.123
3. 1.134,1.132

اعشاریہ کسر اعداد کو اعشاریہ اعداد بھی کہتے ہیں۔ ہم نے اعشاریہ اعداد کو جوڑنے اور گھٹانے کے عمل کا مشق کیا ہے۔ اس میں ہم نے دیکھا ہے کہ ہزارواں میں ہزارواں، سواں میں سواں، دسواں میں دسواں اکائی میں اکائی اور اسی طرح آگے اعداد کو جوڑتے اور گھٹاتے ہیں۔

جیسے 25.67 + 4.3 کا حل معلوم کیجیے:

$$\begin{array}{r} 25.67 \\ +\ 4.30 \\ \hline 29.97 \end{array}$$

(i)
$$\begin{array}{r} 0.23 \\ +\ 1.90 \\ \hline 2.13 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 1.75 \\ -\ 0.30 \\ \hline 1.45 \end{array}$$

کوشش کیجیے:

1- 10 پیسے کو روپے میں۔
2- 125 سینٹی میٹر کو میٹر میں۔
3- 1025 گرام کو کیلوگرام میں۔

کوشش کیجیے:

(i) $0.44+0.11=$ (ii) $2.12-2.1=$ (iii) $1.23+1.2=$

(iv) $1.12-0.12=$ (v) $1.02+0.15=$ (vi) $4.12-1.13=$

سوالنامہ : 3.1

1- مندرجہ ذیل اعشاریہ عدد کے جوڑے میں سے بڑے عدد کو لکھیے:

(a) 5.7 اور 5.67 (b) 5.61 اور 5.60 (c) 4.67 اور 5.67

2- جوڑیے:

(a) 2.11 میں 1.22 (b) 0.12 میں 1.23 (c) 0.87 میں 2.13

(d) 1.002 میں 1.2 (e) 2.099 میں 1.02 (f) 3.76 میں 2.37

3- گھٹائیں:

(a) 1.23 میں سے 2.34 (b) 0.1 میں سے 1.01 (c) 1.23 میں سے 2.34

4- 1.20, 2.01, 0123, 0.21, 1.02 کو بڑھتی ترتیب میں لکھیے۔

5- اعشاریہ کا استعمال کر مندرجہ ذیل کو روپے میں ظاہر کیجیے:

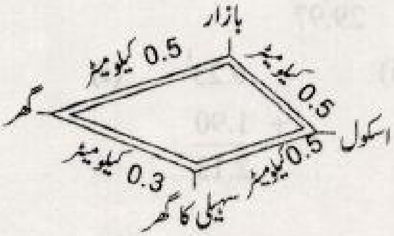
(a) 212 روپے 10 پیسے (b) 5 روپے 5 پیسے (c) 315 پیسے

6- (i) 10 سینٹی میٹر کو میٹر اور کیلومیٹر میں لکھیے۔

(ii) 115 سینٹی میٹر کو میٹر اور کیلو میٹر میں لکھیے۔

7- اعشاریہ عدد 3.24 اور 2.345 کی تفصیلی شکل لکھیے اور ہر ایک میں 2 کی مقامی قیمت معلوم کیجیے۔

8- مالا اپنے گھر سے اسکول بازار ہو کر جاتی ہے یا اپنی سہیلی کے گھر ہو کر جاتی ہے (تصویر کے مطابق گھر سے بازار ہو کر اسکول جانے میں اسے کتنی دوری چلنی ہوگی۔ اگر وہ گھر سے اپنی سہیلی کے گھر جاتی ہے اور وہاں سے وہ اسکول جاتی ہے تو اسے کتنی دوری چلنی ہوگی۔ کن حالات میں اسے کم دوری چلنی ہوگی۔



9- ببلو نے گھر کے لیے 3 کیلو 500 گرام آلو، 1 کیلوگرام بیگن اور افسانہ نے 2 کیلو 50 گرام چینی، 2 کیلو گرام اور 250 گرام بیسن خریدے۔ کس نے وزن میں زیادہ سامان خریدے اور کتنا؟

10- 15 میٹر، 6.5 میٹر سے کتنا زاید ہے؟

3.2- اعشاریہ اعداد کا ضرب (Decimal Multiplication)

ستیندر نے 12.50 روپے فی کیلوگرام کی شرح سے 2 کیلوگرام پیاز اور 6.5 روپے فی کیلوگرام کی شرح سے 1.5 کیلوگرام آلو خریدے۔ اُسے کتنے روپے دُکاندار کو دینے ہوں گے؟ طے ہے کہ پیاز خریدنے میں لگے کل روپے اور آلو خریدنے میں لگے کل روپے کے جوڑ کے برابر ہوگا۔

پیاز خریدنے میں لگے کل روپے $12.50\times2 = 25.00$ روپیہ

آلو خریدنے میں لگے کل روپے $(6.50\times1.5) =$ روپیہ؟

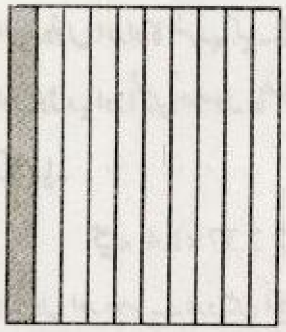
اس طرح ہمارے سامنے ایسی کئی صورت حال آسکتی ہے جس میں ہمیں دو اعشاریہ (Decimal) کسر کو آپس میں ضرب کرنا ہوتا ہے۔ آیئے ایک سہل مثال 0.1×0.1 کی مدد سے دو اعشاریہ کسر کے ضرب کو سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$\because \quad 0.1 = \frac{1}{10}$ (اعشاریہ کسر کو عام کسر میں بدلنا)

اب $0.1\times0.1 = \frac{1}{10}\times\frac{1}{10} = \frac{1\times1}{10\times10} = \frac{1}{100} = 0.01$ یعنی

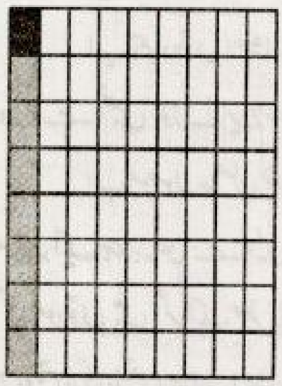
آیئے 0.1×0.1 کے حاصل ضرب کو تصویر سے سمجھنے کی کوشش کریں:

$\because$ $0.1=\frac{1}{10}$ کسر $\frac{1}{10}$ کا مطلب ہے 10 کے برابر حصوں میں سے ایک حصہ خاکہ : 3.1 کا سایہ دار حصہ $\frac{1}{10}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ $0.1\times0.1=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ یعنی $\frac{1}{10}$ کا $\frac{1}{10}$ اب تصویر میں ظاہر 10 سویں حصے کے اور 10 حصے کیے۔



خاکہ : 3.1

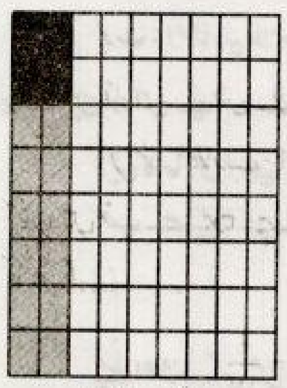
اس طرح گہرا سایہ دار حصہ 0.1×0.1 کو دکھاتا ہے۔



خاکہ : 3.2

یہ مکمل کا کتنا حصہ ہے؟ یہ معلوم کرنے کے لیے پوری اکائی (مربع) کو ویسے چھوٹے چھوٹے مربعوں میں بانٹا۔ ہم پاتے ہیں کہ اس طرح حاصل چھوٹا مربع 100 برابر حصوں میں سے ایک حصہ ہے۔

کیا ہم اوپر دیئے گئے طریقوں سے 0.2×0.2 حاصل ضرب معلوم کر سکتے ہیں؟ ظاہر ہے کہ $0.2\times0.2=\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}$ یعنی $\frac{4}{100}$ جو کل 100 برابر حصہ میں سے چار حصہ ہوگا۔ اس لیے یہ سایہ دار حصہ $\frac{4}{100}$ کو ظاہر کرتا ہے، جو 0.04 کے برابر ہیں۔ اس لیے $0.2\times0.2=0.04$



خاکہ : 3.3

دھیان دیجئے کہ اعشاریہ کا ضرب میں شمار کنندہ ہمیشہ وہ عدد ہوگا جو اصل اعشاریہ عدد میں تھا $(2\times2=4)$۔ اس لیے اس کا حاصل ضرب بغیر اعشاریہ کے کریں۔ تب بھی عدد وہی آئے گا۔ پھر نسب نما میں اتنے عدد میں صفر ہوتے ہیں جتنا کہ اصل عدد میں۔ جتنے ہندسہ کے بعد اعشاریہ تھا۔

مینا نے دو اعشاریہ کسر کو ضرب کرتے وقت سب سے پہلے اعشاریہ علامت (نشان) کو چھوڑتے ہوئے

ان دونوں اعداد کا ضرب کیا۔ پھر اس نے دونوں اعشاریہ اعداد کے اعشاریہ والے حصہ میں ہندسوں کی تعداد کو گنا اور جوڑ دیا اور انھیں موصولہ حاصل ضرب کی داہنی طرف سے اتنی عدد میں ہندسوں کو چھوڑ کر اعشاریہ علامت (نشان) رکھ دیا۔

جیسے 2.37×1.4 میں اُسے 237 اور 14 کا ضرب کیا، پھر دیکھا کہ پہلے میں اعشاریہ کے بعد دو ہندسوں اور دوسرے عدد میں ایک ہندسہ ہے تو اس نے موصولہ حاصل ضرب 3318 میں ایسی جگہ اعشاریہ لگایا کہ اعشاریہ کے بعد تین ہندسہ رہے یعنی 3 کے بعد اس لیے موصولہ حاصل ضرب 3.318 رہا۔

جیسے 0.2×0.2 میں اعشاریہ علامت کے بغیر ضرب کرنے پر $02 \times 02 = 2 \times 2 = 4$

اب ہم دونوں اعشارحیہ کسر میں علامت (نشان) کے بعد ہندسوں کو گنتے ہیں، جن کی تعداد سلسلہ وار 1 اور 1 ہے۔ انھیں جوڑنے پر $1+1=2$

اب موصولہ حاصل ضرب میں دائیں سے بائیں جانب دو ہندسہ بڑھتے ہیں۔ لیکن حاصل ضرب میں تو صرف ایک ہندسہ ہی ہے۔ ایسی حالت میں ہم حاصل ضرب کی بائیں جانب ضرورت کے تحت صفر رکھتے ہیں۔ دی گئی صورتوں میں اگر ایک صفر بائیں جانب رکھیں تو بائیں طرف بڑھنے کے لیے ضروری دو ہندسہ حاصل ہو جاتے ہیں، جس کی بائیں جانب اعشاریہ کی علامت استعمال کرنے سے 0.04 حاصل ہے جو 0.2×0.2 کا حاصل ضرب ہے۔ اس لیے $0.2 \times 0.2 = 0.04$

نوٹ : اعشاریہ علامت کا مقام تعین کرنے کے لیے حاصل ضرب کے اکائی ہندسہ سے بائیں جانب اور بڑھتے ہیں اور اس لیے ضرورت پڑنے پر صفر بھی حاصل ضرب کی بائیں جانب ہی رکھتے ہیں۔

ذیل کا حاصل ضرب کریں : 0.25×0.25

سب سے پہلے 25×25 معلوم کریں گے

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 25 \\ \hline \end{array}$$

پہلے اعشاریہ کسر میں اعشاریہ علامت کے بعد 2 ہندسہ ہے۔

دوسرے اعشاریہ کسر میں اعشاریہ علامت کے بعد 2 ہندسہ ہے۔

کوشش کیجیے۔

حاصل ضرب معلوم کیجیے :

(i) $0.2 \times .02$

(ii) 0.2×1.2

(iii) 1.3×1.3

(iv) 1.23×1.2

(v) 5×2.5

(v) 4×1.3

∴ حاصل ضرب میں اعشاریہ علامت دائیں جانب سے بائیں طرف بڑھنے پر (2+2) چار ہندسوں کے بعد یعنی 0625 کی بائیں جانب ہوگا۔ اس لیے حاصل ضرب = 0.0625 یا

$$0.25 \times 0.25 = 0.0625$$

3.2.1 اعشاریہ کسر عدد کا 10 ، 100 اور 1000 سے ضرب

روی نے مکمل اعداد سے ضرب کرتے وقت پایا کہ کسی فطری عدد (Natural Nuber) میں 10، 100 یا 1000 سے ضرب کرنے پر اُس عدد کی دائیں طرف بالترتیب ایک دو یا تین صفر بڑھ جاتے ہیں۔ جیسے :

$$5 \times 10 = 50, \quad 5 \times 100 = 500, \quad 5 \times 1000 = 5000$$

روی نے مکمل اعداد اور عدد صحیح کے ساتھ بھی یہ عمل پھر سے کر کے پایا کہ ہر حالت میں عدد کے بعد صفر کی توسیع مندرجہ بالا قاعدے کے مطابق ہی ہوتی ہے۔ اس نے کسر اعشاریہ اعداد میں سلسلہ وار 10 ، 100 اور 1000 سے ضرب کر کے حاصل ضرب معلوم کر کے اپنے قاعدے کی توثیق کرنی چاہی۔ اس نے ایک اعشاریہ کسر 3.456 لیا اور سلسلہ وار 10 ، 100 اور 1000 سے ضرب کیا۔

$$3.456 \times 10 = \frac{3456}{1000} \times 10 = \frac{3456}{100} = 34.56$$

$$3.456 \times 100 = \frac{3456}{1000} \times 100 = \frac{3456}{10} = 345.6$$

$$3.456 \times 1000 = \frac{3456}{1000} \times 1000 = 3456 = 3456.00$$

اس نے حیران کن نتیجہ حاصل کیا۔ اس نے دیکھا اس عدد میں سلسلہ وار 10 ، 100 اور 1000 سے ضرب کرنے پر صفر کی تعداد نہیں بڑھتی بلکہ اعشاریہ کی علامت کا مقام بدل جاتا ہے اور یہ تبدیلی 10 ، 100 اور 1000 میں صفروں کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔ 10 میں ایک صفر ہے اس لیے 10 سے ضرب کرنے پر اعشاریہ علامت اقسام دائیں طرف کھسک جاتا ہے۔ 100 یا 1000 سے ضرب کرنے پر یہ اعشاریہ علامت سلسلہ وار دو ہندسہ یا تین ہندسہ دائیں جانب کھسک جاتا ہے۔

حاصل ضرب معلوم کریں :

$1.230 \times 10 =$

$1.203 \times 100 =$

$1.203 \times 1000 =$

$1.203 \times 10000 =$

اب آپ سمجھ گئے ہوں گے کہ ستیندر کو کل $(12.50 \times 2) + (6.50 \times 1.5)$ روپے بھی $25 + 9.750 = 34.75$ روپے دینے پڑیں گے۔

سوالنامہ : 3.2

-1 حاصل ضرب معلوم کیجیے:

(i)	5.4×0.4	(ii)	$4.32 \times .02$	(iii)	8.24×0
(iv)	15.2×0.002	(v)	3×0.3	(vi)	0.7×0.7
(vii)	0.0003×10	(viii)	0.0003×100	(ix)	0.0003×1000
(x)	0.0003×10000	(xi)	0.003×10000	(xii)	0.0003×0.0003
(xiii)	0.400×0.500	(xiv)	-2.5×5	(xv)	$(-2.5) \times (-2.5)$

-2 کسی مربع کا ضلع 2.3 میٹر ہے تو اس کا رقبہ کیا ہوگا؟

-3 کسی مثلث کا قاعدہ اور اُس قاعدے پر عمودی لمبائی سلسلہ وار 2 سینٹی میٹر اور 1.5 سینٹی میٹر ہے تو مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے۔

-4 70.5 روپیہ فی میٹر کی شرح سے 3.5 میٹر کپڑے کی قیمت کیا ہوگی؟

-5 ایک موٹر سائیکل 1 لیٹر پٹرول سے 55.75 کیلو میٹر جاتی ہے۔ اگر تیل ٹنکی میں 2.750 پٹرول ہو تو اس گاڑی کے ذریعہ زیادہ سے زیادہ کتنی دوری طے کی جا سکتی ہے۔

3.3 - اعشاریہ کسر اعداد کا تقسیم (Division)

ہم اپنے روزمرہ کی زندگی میں کئی ایسے حالات سے گزرتے ہیں جس میں اعشاریہ اعداد میں اعشاریہ اعداد کا تقسیم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ آج سُربھی بھی کچھ اسی طرح کی الجھنوں میں پھنس گئی ہے۔ اُس کے گھر میں 1.5 لیٹر دودھ خریدا جاتا ہے۔ وہ دودھ کو گلاس میں رکھنا چاہتی ہے۔ ہر ایک گلاس میں زیادہ سے زیادہ 0.25 لیٹر دودھ رکھا جا سکتا ہے۔ اُسے کتنے گلاس کی ضرورت پڑے گی؟ کیا ہم سُربھی کی کوئی مدد کر سکتے ہیں؟ آیئے اسے سمجھنے کے لیے اعشاریہ اعداد میں کچھ مکمل اعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔

ایک کسر اعشاریہ عدد لیتے ہیں 345.67 اس میں سلسلہ وار 10، 100، 1000 سے باری باری تقسیم کرتے ہیں۔

10 سے تقسیم کرنے پر:

$$345.67 \div 10 = 345.67 \times \frac{1}{10} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{34567}{1000} = 34.567$$

یہاں 10 میں صفر کا عدد 1 ہے۔ اس لیے اعشاریہ علامت کا تعین بائیں جانب ایک عدد کھسک کر ہوا۔

100 سے تقسیم کرنے پر:

$$345.67 \div 100 = 345.67 \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{34567}{10000} = 3.4567$$

یہاں 100 میں صفر کی تعداد دو ہے۔ اس لیے اعشاریہ علامت کا تعین بائیں جانب دو عدد کھسک کر ہوا۔

1000 سے تقسیم کرنے پر:

$$345.67 \div 1000$$

$$=345.67 \times \frac{1}{1000} = \frac{34567}{100} \times \frac{1}{1000} = \frac{34567}{100000} = 34567$$

کوشش کیجیے:

$2.4 \div 10 = ?$

$2.4 \div 100 = ?$

$2.4 \div 1000 = ?$

یہاں 1000 میں صفر کی تعداد تین ہے۔ اس لیے اعشاریہ علامت کا تعین بائیں جانب تین عدد کھسک کر ہوگا۔

اسی طرح ہم پاتے ہیں کہ جب کسی اعشاریہ کسر عدد کو 10، 100 یا 1000 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو حاصل تقسیم میں اعشاریہ کا نشان بائیں جانب اتنی ہی جگہ کھسک جاتا ہے، جتنی 10، 100، ...1000 وغیرہ میں 1 کے صفر ہوتا ہے۔

ایک دوسری مثال لیتے ہیں:

$$3.6 \div 2 = 3.6 \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{36}{10} \times \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{36}{2} \times \frac{1}{10}$$

$$= 18 \times \frac{1}{10} \quad \text{یا} \quad = \frac{18}{10} = 1.8$$

کوشش کیجیے:

$7.5 \div 3 = ?$

$0.15 \div 3 = ?$

$15.8 \div 3 = ?$

مندرجہ بالا مثالوں سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر مقسوم علیہ مکمل عدد ہو تو اس سے اعشاریہ کسر میں تقسیم دیا جا سکتا ہے۔ یعنی سب سے پہلے ہم 36 کو 2 سے تقسیم کرتے ہیں، جس سے ہمیں 18 حاصل ہوتا ہے۔ 3.6 میں اعشاریہ کے دائیں جانب ایک ہندسہ ہے۔ اس لیے 18 میں بھی اعشاریہ اس طرح رکھیں گے کہ اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ بچے۔

کسی کسر اعشاریہ عدد میں کسر اعشاریہ عدد سے تقسیم کرنے میں بھی ہم اوپر دیئے گئے قاعدوں کا استعمال کرتے ہیں پر اس کے لیے پہلے مقسوم علیہ (Divisor) کو مکمل عدد میں بدل دیتے ہیں۔ مقسوم علیہ کو مکمل عدد بنانے کے لیے ضرورت کے تحت 10، 100، 1000 وغیرہ سے مقسوم اور مقسوم علیہ میں ضرب کرتے ہیں۔ پھر اگر مقسوم میں اعشاریہ علامت بچتا ہے تو اسے بھی عام کسر کی شکل میں لکھتے ہیں۔ آخر میں تقسیم دینے کے عمل کو انجام دیتے ہیں۔ آیئے کچھ مثالوں سے ان باتوں کو سمجھیں:

-1 $4.5 \div 0.5 = 4.5 \times \frac{1}{0.5} = \frac{4.5}{0.5} = \frac{4.5 \times 10}{0.5 \times 10} = \frac{45}{5} = 9$ {∵ 0.5 میں اعشاریہ کے بعد ایک ہندسہ ہے۔ اس لیے 10 سے ضرب کریں گے۔

پھر سُربھی کی الجھنوں پر غور کرتے ہیں۔ اُسے دودھ کے لیے ضروری گلاسوں کی

$$\text{تعداد} = \frac{\text{کل دودھ}}{\text{ایک گلاس میں دودھ}} = \frac{1.5}{0.25} = \frac{1.5 \times 100}{0.25 \times 100} = \frac{150}{25} = 6$$

اس طرح سُربھی کو 6 گلاس کی ضرورت ہوگی۔

اوپر دی گئی مثالوں میں ہم نے دیکھا کہ تقسیم کا عمل کرنے پر باقی صفر رہ گیا۔ حاصل تقسیم کوئی مکمل عدد یا اعشاریہ کسر ہوتا ہے لیکن کبھی کبھی تقسیم کے عمل میں باقی صفر نہیں آتا۔ جیسے 9 ÷ 129 ان حالتوں کے بارے میں ہم اگلی جماعتوں میں بیان کریں گے۔

کوشش کیجیے:

$40.23 \div 10 = ?$,
$40.23 \div 100 = ?$,
$40.23 \div 1000 = ?$,

سوالنامہ : 3.3

1- تقسیم کیجیے:

(i) 4.25 کو 2 سے (ii) 0.25 کو 0.5 سے

(iii) 17.5 کو 3.5 سے (iv) 1.75 کو 3.5 سے

(v) 0.175 کو 3.5 سے (vi) 0.175 کو 35 سے

(vii) 2.75 کو 0.5 سے (viii) 0.175 کو 0.35 سے

(ix) 400.23 کو 10 سے (xii) 400.23 کو 100 سے

(xiii) 40.23 کو 1000 سے (xiv) 35 کو 0.2 سے

حل کیجیے:

(i) $40.5 \div 2.2$ (ii) $40.5 \div 1000$

(iii) $2.5 \div 0.5$ (iv) $8 \div 0.25$

(v) $1 \div 0.25$ (vi) $0 \div 0.5$

(vii) $0.2 \div 0.2$

3- ایک کپڑے کے تھان کی کل لمبائی 32.50 میٹر ہے۔ اگر ایک طالبہ کی پوشاک 3.25 میٹر کپڑے سے بنتی ہے تو کپڑے کے ایک تھان سے کتنی طالبات کے لیے پوشاک بنائی جا سکتی ہے؟

4- کسی مستطیل کا رقبہ 6.5 مربع میٹر ہے۔ اگر اس کی چوڑائی 1.25 میٹر کی ہو تو لمبائی معلوم کیجیے۔

5- ایک موبائل کمپنی 3 پیسے فی سکنڈ کی شرح سے کال کرنے کا چارج لیتی ہے۔ اگر سونالی کے ذریعہ فون کرنے پر 0.9 روپیہ لگتا ہے تو اس نے کتنے وقت تک موبائل پر بات کی؟

6- ایک آدمی لگاتار 10.5 گھنٹے تک سلائی کی۔ اگر وہ 3.5 گھنٹے میں ایک شلوار سیتا ہے تو اس نے کل کتنی شلوار سلائی کی؟

7- لسی کے 15 پیکٹ کا وزن 1.45 کیلوگرام ہے تو ایک پیکٹ کا وزن معلوم کیجیے۔

ہم نے سیکھا

1- اعشاریہ کسروں کے موازنہ میں سب سے پہلے مکمل حصہ کا موازنہ کرتے ہیں، جس اعشاریہ کسر کا مکمل حصہ بڑا ہوتا ہے وہ اعشاریہ کسر بڑا ہوتا ہے۔ اعشاریہ کسروں کا مکمل حصہ برابر ہونے پر اعشاریہ کے دسواں حصہ کا موازنہ کرتے ہیں اور جس کا دسواں حصہ بڑا ہوتا ہے وہ اعشاریہ کسر بڑا ہوتا ہے۔

2- اعشاریہ اعداد کے ضرب میں سب سے پہلے اعداد میں ضرب بغیر اعشاریہ علامت کا کرتے ہیں۔ پھر اعشاریہ علامت کا تعین کرنے کے لیے دونوں ضرب ہونے والی اعداد کے اعشاریہ حصہ کے ہندسہ گن کر جوڑ لیتے ہیں اور حاصل ضرب میں دائیں جانب سے شروعات کر کے بائیں جانب بڑھتے ہوئے اس جوڑ کے برابر ہندسہ چھوڑ کر اعشاریہ کی علامت کو لگا دیتے ہیں۔

3- اعشاریہ عدد میں 10، 100، 1000 سے ضرب کرنے پر اعشاریہ علامت کا مقام بدل جاتا ہے۔ یہ مقام دایں جانب اُتنے مقام ہوتے ہیں جتنے صفر 1 کے علاوہ ہوتے ہیں۔ مقام بڑھانے کے لیے اگر ہندسہ نہیں ہوتے ہیں تو دائیں جانب ضرورت کے مطابق صفر کی تعداد بڑھا سکتے ہیں۔

4- اعشاریہ عدد کے مقسوم اور مقسوم علیہ کو مکمل عدد میں بدل کر تقسیم کے عمل کو کرتے ہیں اور پھر ضرب یا تقسیم کی شکل میں 10، 100، ...1000 وغیرہ سے ضرب یا تقسیم کر اعشاریہ علامت مقرر کرتے ہیں۔

5- اعشاریہ عدد میں 10، 100، 1000 وغیرہ سے تقسیم کرنے پر اعشاریہ علامت بائیں جانب اتنے ہندسہ سے مقام بدلتے ہیں جتنے صفر 10، 100، ...1000 میں 1 کے علاوہ ہوتے ہیں۔ ہندسہ کم پڑ جانے پر اعشاریہ عدد کے بائیں جانب ضرورت کے مطابق صفر کو بڑھا دیتے ہیں۔

S.S.A. 2014-15 (FREE)

باب-4

آنکڑوں کا بندوبست(Management of Data)

4.1-تمہید:

پچھلی جماعت میں آپ نے مختلف طرح کے آنکڑوں پر کام کیا تھا۔ آپ نے آنکڑوں کو جمع کرنا، ان کو فہرست نما کرنا، انھیں تصویر نما اور تصویری خاکہ اور ڈنڈا گراف کی صورت میں ظاہر کرنا سیکھا تھا۔ آنکڑوں کا جمع، تصویری خاکہ اور پیشکش ہمارے تجربوں کو منظم کرنے اور ان سے نتیجہ نکالنے میں ہماری مدد کرتے ہیں۔ اس باب میں ہم اس سے آگے آنکڑوں کے بارے میں سیکھیں گے۔

جدول: 4.1

شہر	شہروں کی حرارت	
	زیادہ سے زیادہ	کم سے کم
پٹنہ	41°c	25°c
گیا	43 °c	26°c
بھاگلپور	37°c	23°c
رانچی	36°c	24°c
دلّی	42 °c	27°c
ممبئی	36 °c	29°c
چنئی	31 °c	27°c
سری نگر	23 °c	11°c

آپ کی روزمرہ کی زندگی میں آپ کے سامنے مختلف نوع کی رپورٹ آتی ہیں۔ جیسے آپ کی جماعت کے طلبا کے ذریعہ ریاضی کے یونٹ ٹسٹ میں حاصل کیے گئے نمبر وغیرہ۔ اسی طرح آپ اخباروں، ٹیلی ویژنوں، رسالوں اور دوسرے ذرائع سے مختلف طرح کی خبریں دیکھ اور پڑھ چکے ہیں۔ انھیں رپورٹوں کو آنکڑا (Data) کہتے ہیں۔ آنکڑے ہمیشہ ایک ایسی حالت کے ضمن میں حاصل کیے جاتے ہیں۔ جن کا ہم مطالعہ کرنا چاہتے ہیں۔ آنکڑوں کے یہ مجموعے آپ کو کیا بتاتے ہیں؟

جدول: 4.2

ایک اسکول میں مختلف سوموار کو غیر حاضری بتانے والے آنکڑے

پہلا سوموار	☺ ☺ ☺ ☺ ☺
دوسرا سوموار	☺ ☺ ☺
تیسرا سوموار	☺ ☺ ☺ ☺ ☺ ☺
چوتھا سوموار	☺ ☺
پانچواں سوموار	☺ ☺ ☺ ☺ ☺

جدول 4.1 سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ گیا کا زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت سب سے زیادہ تھا اور سری نگر کا درجۂ حرارت سب سے کم تھا۔ جدول 4.2 سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ چوتھے سوموار کو اسکول میں سب سے کم بچے غیر حاضر تھے۔ جتنے بچے پہلے سوموار کو غیر حاضر تھے اتنے ہی بچے پانچویں سوموار کو غیر حاضر تھے۔ اس طرح آنکڑے ہمیں مختلف طرح کی

باتیں ہمیں بتا سکتے ہیں۔

آنکڑوں کی فراہمی یا جمع کرنا (Collection of Data)

جدول 4.1 کے اعداد و شمار ہمیں یہ نہیں بتا سکتے کہ پورے سال میں کس شہر کا زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت سب سے زیادہ تھا؟ یہ جاننے کے لیے ہمیں ان شہروں میں سے ہر ایک شہر کے پورے سال کے دوران رکارڈ (Record) کیے گئے زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارتوں سے متعلق آنکڑے جمع کرنے پڑیں گے۔

اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ آنکڑوں کا ایک دیا ہو مجموعہ (Collection of Data) ہمیں اس سے متعلق ایک خصوصی رپورٹ دے پائے۔ اس کے لیے ہمیں اس خصوصی رپورٹ کو دھیان میں رکھتے ہوئے آنکڑوں کو اکٹھا کرنے کی ضرورت پڑتی ہے۔ جدول 4.1 ہمیں پورے سال کے دوران ان شہروں کے زیادہ سے زیادہ درجۂ حرارت کیا رہے، کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کر سکتا۔ اس طرح آنکڑوں کو جمع کرنے سے پہلے ہمیں یہ جاننا بہت ضروری ہو جاتا ہے کہ ہم ان کا استعمال کس کے لیے کریں گے؟

بطور مثال آپ درج ذیل صورت حال پر غور کریں:

- جماعت میں آپ کا ریاضی میں مظاہرے کا آنکڑا
- آپ کی جماعت کا ریاضی میں مظاہرے کا آنکڑا
- بہار میں خواندگی شرح کا آنکڑا
- کسی گاؤں میں 5 سال سے کم بچوں کی تعداد کا آنکڑا

مندرجہ بالا حالات میں آپ کو کس طرح کے آنکڑوں کی ضرورت ہے؟ یعنی ہر ایک کے لیے مندرجہ بالا آنکڑہ کیا ہے۔ اپنے دوستوں سے تذکرہ کیجیے اور پہچانیے۔ ہر ایک حالت میں کن آنکڑوں کی ضرورت ہے؟

4.3 - آنکڑوں کی تنظیم (Organization of Data)

جب ہم آنکڑوں کو جمع کرتے ہیں، تو ہمیں انھیں ریکارڈ (Record) کر کے منظم کرنا ہوتا ہے۔ آیئے ایک مثال پر تذکرہ کریں۔

کلاس ٹیچر محترمہ ارچنا یہ جاننا چاہتی تھی کہ ریاضی میں بچوں کی کارکردگی کیسی رہی؟ وہ بچوں کے ذریعہ حاصل شدہ نمبروں کو مندرجہ ذیل طریقے سے لکھتی ہیں:

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

اس حالت میں آنکڑے آسانی سے سمجھنے کے لائق نہیں تھے۔ اس آنکڑوں سے یہ بھی معلوم نہیں ہوتا کہ کس

طالب علم کی کارکردگی کیسی رہی ہے؟ ارچنا کے ایک دوست نے اِن آنکڑوں کو جدول کی صورت میں جمع کرنے میں اس کی مدد کی۔

جدول : 4.3

رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر	رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر
1	آشیش	23	6	سہانا	46
2	ارشد	35	7	اکبر احمد	13
3	امریندر	48	8	کوکیل	27
4	دیپو	30	9	منیشا	32
5	دِپتی	25	10	دھیرج	38

اب ارچنا یہ سمجھ سکی کہ کس طلبا نے کتنے نمبرات حاصل کیے۔ لیکن وہ کچھ اور معلومات چاہتی تھیں۔ تو ان کے دوست نے آنکڑوں کو دوسرے طریقے سے ظاہر کیا۔

رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر	رول نمبر	نام	حاصل شدہ نمبر
3	امریندر	48	4	دیپو	30
6	سہانا	46	8	کوکیل	27
10	دھیرج	38	5	دِپتی	25
2	ارشد	35	1	آشیش	23
9	منیشا	32	7	اکبر احمد	13

اب ارچنا کو یہ جاننا آسان ہوگیا کہ کس کی سب سے اچھی کارکردگی ہے؟ کتنے بچوں نے 25 سے کم نمبر لایا ہے؟ اور اسکو مدد کی ضرورت ہے۔ اس طرح جب ہم آنکڑوں کو ایک مناسب جدول میں رکھتے ہیں تو انھیں سمجھنا اور اس کا بیان کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

ہمارے سامنے آنے والے کئی طرح کے آنکڑے جدول کی صورت میں ہوتے ہیں۔ ہمارے اسکول کے رجسٹر، پروگریس رپورٹ، مشقی کتابوں میں ترتیب وار فہرست، درجۂ حرارت کے ریکارڈ اور دوسرے مختلف آنکڑے جدول نما

(Tabular) صورت میں ہوتے ہیں۔ کیا آپ کچھ اور آنکڑوں کے بارے میں سوچ سکتے ہیں، جو جدول نما ہو؟

خود کر کے دیکھئے:

اپنے جماعت کے بچوں کا وزن معلوم کیجیے۔ حاصل شدہ آنکڑوں کو جدول میں منظم کیجیے اور مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) سب سے کم وزن کس کا ہے؟

(ii) کتنے طلبہ 40 کیلوگرام سے زیادہ وزن کے ہیں؟

(iii) کون سا وزن زیادہ سے زیادہ بچوں کا ہے؟

(vi) سب سے زیادہ اور سب سے کم وزن کا فرق کتنا ہے؟

4.4 - نمائندہ قیمت

آپ اوسط(Average) لفظ سے ضرور ہی واقف ہوں گے اور اپنے روزمرہ کی زندگی میں اوسط لفظ سے متعلق مندرجہ ذیل اقوال ضرور ہی سنے اور پڑھے ہوں گے:

- عیسیٰ اوسطاً 5 گھنٹے پڑھتا ہے۔
- میری جماعت کے طلبہ کی اوسط عمر 12 سال ہے۔
- میرے شہر کا اوسط درجۂ حرارت 40 ڈگری سلسیس (40°c) ہے۔
- ایک اسکول کا سالانہ امتحان کے وقت طلبہ کی اوسط حاضری 98 فیصد تھی۔

اس طرح کے مختلف قول ہو سکتے ہیں۔ اوپر دیئے گئے اقوال کے بارے میں غور کیجیے۔

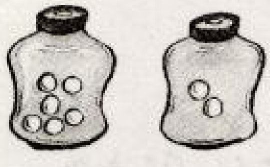
کیا آپ سوچتے ہیں کہ پہلے قول میں بتایا گیا بچہ روزانہ ٹھیک 5 گھنٹے پڑھتا ہے؟ یا کیا اُس خاص وقت پر دی گئی جگہ کا درجۂ حرارت ہمیشہ 40°c رہتا ہے؟ یا کیا اس جماعت کے ہر ایک طلبہ کی عمر 12 سال ہے؟ ظاہر ہے کہ ان سوالوں کا جواب ہے ''نہیں''۔ تب یہ قول ہمیں کیا بتاتے ہیں؟

اوسط سے ہم سمجھتے ہیں کہ عیسیٰ ہمیشہ ایک دن میں 5 گھنٹے پڑھتا ہے۔ کچھ دن وہ اس سے کم گھنٹے پڑھتا ہے۔ اور کچھ دن اس سے زیادہ گھنٹے بھی پڑھتا ہے۔ اسی طرح 40°c کے رہتا ہے۔ کبھی وہ 40°c سے زیادہ بھی رہتا ہے۔

اوسط ایک ایسا عدد ہے جو آنکڑوں کے مجموعہ کے مرکزی رجحان (Central Tendency) کو ظاہر کرتی ہے۔ اس لیے ہم کہتے ہیں کہ اوسط، آنکڑوں کے ایک مجموعہ کے مرکزی رجحانات کا پیمانہ ہے۔

مختلف قسم کے آنکڑوں کی تشریح کرنے کے لیے مختلف طرح کے نمائندے (Representative) یا مرکزی قیمت (Central Value) کی ضرورت ہوتی ہے۔ ان میں سے ایک نمائندہ قیمت ریاضی اوسط یا متوازی اوسط (Arthmetic Mean) ہے۔

4.5 - آنکڑوں کا ریاضی اوسط



خاکہ: 4.1

آنکڑوں کے ایک مجموعے کے لیے خاص طور سے استعمال کیا جانے والا نمائندہ قیمت ریاضی اوسط یا متوازی اوسط (Arthmetic Mean) ہے۔ مختصر میں اسے اوسط (Mean) کہتے ہیں۔ دو برتنوں میں بالترتیب 2 لڈو اور 6 لڈو ہیں۔ اگر دونوں برتنوں میں برابر برابر لڈو رکھے جائیں تو ہر ایک برتن میں کتنا لڈو ہوگا؟

اس کے لیے ہمیں ہندسوں کی ریاضی اوسط معلوم کرنا ہوگا۔

$$\text{ہندسوں کی اوسط} = \frac{\text{لڈو کی کل تعداد}}{\text{برتنوں کی تعداد}}$$

خاکہ 4.2

$$= \frac{2+6}{2} \text{ لڈو} = 4 \text{ لڈو}$$

اوسط (Mean) کو مندرجہ ذیل صورت سے بھی جانا جاتا ہے۔

$$\text{اوسط} = \frac{\text{سبھی مشاہدوں کی جمع}}{\text{مشاہدوں کی تعداد}}$$

مثال: 1 نیلم تین پچھلے بالترتیب دنوں میں بالترتیب 5 گھنٹے، 6 گھنٹے اور 4 گھنٹے پڑھتی ہے۔ اس کے پڑھنے کا اوسط وقت کیا ہے؟

حل: نیلم کے پڑھنے کا اوسط وقت ہوگا:

$$\frac{\text{پڑھائی میں لگایا گیا کل وقت}}{\text{دنوں کی تعداد جس میں پڑھائی کی}} = \frac{5+6+4}{3} \text{ گھنٹے} = 5 \text{ گھنٹے روزانہ}$$

اس طرح نیلم روزانہ 5 گھنٹے کی اوسط سے پڑھائی کرتی ہے۔ یعنی کچھ دن وہ اس سے کم گھنٹے اور کچھ دن

اس سے زیادہ گھنٹے پڑھتی ہے۔

مثال: 2 ایک بلّے باز نے 6 پاریوں میں حسب ذیل رَن بنائے: 45, 56, 58, 38, 37, 48

ایک پاری میں اُس کے ذریعہ بنائے گئے رنوں کی اوسط معلوم کیجیے۔

حل: کل رَن = $282 = 48 + 37 + 38 + 58 + 56 + 45$

$$\text{اوسط} = \frac{\text{سبھی مشاہدوں کا جوڑ}}{\text{مشاہدوں کی تعداد}} = \frac{282}{6} = 46$$

اس طرح ایک پاری میں اس کے ذریعہ بنائے گئے رَنوں کی اوسط 47 ہے۔

غور کیجیے، بحث کیجیے اور لکھیے:

مندرجہ بالا مثالوں میں دیئے گئے آنکڑوں پر غور کیجیے اور بتایئے۔

کیا اوسط(Mean) ہر ایک مشاہدہ سے بڑا ہے؟

اپنے دوستوں کے ساتھ بحث کیجیے۔ اسی طرح کی اور مثال بنایئے اور اس سوال کا جواب دیجیے۔

آپ پائیں گے کہ اوسط(Mean) سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدوں کے بیچ میں واقع ہوتا ہے۔ مخصوص حالت میں دو اعداد کا اوسط ہمیشہ ان کے بیچ میں واقع ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر 6 اور 10 کا اوسط (Mean) $\frac{6+10}{2} = 8$ ہے جو 6 اور 10 کے بیچ میں واقع ہے۔

خود کر کے دیکھئے:

1- آپ پڑھائی میں گزارے ہوئے اپنے وقت (گھنٹوں میں) کا پورے ہفتہ کا اوسط معلوم کیجئے۔

2- آپ ایک دن میں اوسطاً کتنے گھنٹے کھیلتے ہیں؟ چار دن کے اعداد و شمار لیں اور بتائیں۔

3- 5 اور 11 کا اوسط(Mean) کہاں واقع ہوگا؟

4.5.1 - حدود یا پھیلاؤ (Range)

آنکڑوں یا مشاہدوں کے سب سے زیادہ اور سب سے کم قیمتوں کے فرق سے ہمیں مشاہدوں کے پھیلاؤ (Range) کا ایک اندازہ ہو جاتا ہے۔ اسے سب سے بڑے مشاہدے میں سب سے چھوٹے مشاہدہ کو گھٹا کر معلوم

کیا جا سکتا ہے۔ ہم اس نتیجے کو آنکڑوں کا پھیلاؤ یا حدود(Range) کہتے ہیں۔

اس لیے مشاہدوں کا حدود = مشاہدوں کی سب سے اونچی قیمت - مشاہدوں کی سب سے نیچی قیمت

مثال: 3 ایک اسکول کے دس اساتذہ کی عمر سالوں میں اس طرح ہے:

38, 40, 32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33

(i) سب سے بڑی عمر والے استاد کی عمر کیا ہے؟ اور سب سے چھوٹی عمر والے استاد کی عمر کیا ہے؟

(ii) اساتذہ کی عمر کا حدود کیا ہے؟

(iii) ان اساتذہ کی اوسط عمر کیا ہے؟

حل: عمر کی بڑھتی ترتیب = 23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

(i) ظاہر ہے کہ سب سے بڑی عمر = 54 سال

اور سب سے چھوٹی عمر = 23 سال

(ii) اساتذہ کی عمر کا حدود(Range) = (54 – 23) سال = 31 سال

(iii) اساتذہ کی اوسط عمر = $\frac{54+41+40+38+35+33+32+28+26+23}{10}$

= $\frac{350}{10}$ سال = 35 سال

سوالنامہ : 4.1

1- اپنی جماعت کے کسی 10 طلبا کے وزن کا آنکڑا جمع کیجیے اور اس کا حدود معلوم کیجیے۔

2- پہلے 7 مکمل اعداد کا اوسط(Mean) معلوم کیجیے۔

3- جماعت کی ایک جانچ میں حاصل کیے گئے مندرجہ ذیل نمبروں کو ایک جدول میں ترتیب دیجیے۔

4, 6, 7, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 7

(i) سب سے بڑا نمبر کون سا ہے؟

(ii) سب سے چھوٹا نمبر کون سا ہے؟

(iii) ان نمبروں کے حدود کیا ہیں؟

(iv) ریاضی اوسط معلوم کیجیے۔

4- ایک کرکٹ کھلاڑی نے 6 پاریوں میں مندرجہ ذیل رَن بنائے۔

45, 40, 35, 50, 0, 100

ان کا اوسط معلوم کیجیے۔

5- ذیل کی جدول میں ہر ایک کھلاڑی کے ذریعہ چار کھیلوں میں حاصل کیے گئے نمبروں کو دکھایا گیا ہے۔

کھلاڑی	کھیل-1	کھیل-2	کھیل-3	کھیل-4
A	10	10	10	14
B	6	8	4	0
C	8	کھیلا نہیں	11	13

اب مندرج سوالوں کے جواب دیجیے:

(i) ہر ایک کھیل میں A کے ذریعہ حاصل شدہ اوسط نمبر معلوم کرنے کے لیے اوسط معلوم کیجیے۔

(ii) ہر ایک کھیل میں C کے ذریعہ حاصل شدہ اوسط نمبر معلوم کرنے کے لیے آپ کل اعداد کو 3 سے تقسیم دیں گے یا 4 سے۔ کیوں؟

(iii) B نے سبھی کھیلوں میں حصہ لیا ہے۔ آپ اس کے نمبر کا اوسط(Mean) کیسے معلوم کریں گے؟ لکھیے۔

(iv) کس کھلاڑی کے کھیل کا مظاہرہ سب سے اچھا ہے؟

6- پچھلے چار سالوں میں ایک اسکول میں طلبا کی تعداد حسب ذیل تھے:

1670, 1750, 2540, 2820

موجودہ سال میں طلبا کی اوسط عدد معلوم کیجیے۔

7- ریاضی کے ایک امتحان میں بچوں کے ایک گروپ کے ذریعہ (100 میں سے) حاصل کیے گئے نمبر 49, 50, 85, 90, 66, 48, 92, 84 اور 75 ہے تو معلوم کیجیے۔

(i) بچوں کے ذریعہ حاصل سب سے کم نمبر اور سب سے زیادہ نمبر

(ii) حاصل نمبر کا حدود

(iii) گروپ کے ذریعہ حاصل اوسط نمبر

8- ایک شہر میں کسی خاص ہفتہ کے 7 دنوں میں ہوئی بارش (ملی میٹر میں) مندرجہ ذیل صورتوں میں درج کی گئی۔

دن	اتوار	سوموار	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	سنیچر
بارش (ملی میٹر)	12.2	0.0	20.5	2.1	5,5	1.0	0.0

مندرجہ بالا آنکڑوں سے

(i) بارش کا حدود(Range) معلوم کیجیے۔

(ii) ہفتہ کی اوسط(Mean) بارش نکالیے۔

(iii) اوسط(Mean) بارش سے کم بارش کون کون سے دن رہی؟

9- اگر 7 ,4 ,X ,5 ,8 ,6 اور 8 کا اوسط 7 ہے تو X کی قیمت معلوم کیجیے۔

10- اگر 10 نمبر کا اوسط 20 ہے تو ہر ایک عدد سے 2 گھٹانے پر نیا اوسط کیا ہوگا؟

11- پانچ اعداد کی اوسط 16 ہے۔ اگر گروہ میں ایک عدد اور ملایا جائے تو 6 اعداد کی اوسط 21 ہو جاتا ہے تو چھٹی عدد کی قیمت معلوم کیجیے۔

4.6 - وسطانیہ(Median)

ہم نے دیکھا کہ اوسط یا ریاضی اوسط آنکڑوں کی ایک نمائندہ قیمت ہے۔ لیکن یہ سب ہمیشہ مناسب ہو، ضروری نہیں ہے۔ جیسے : 11 طلبا کی ایک جماعت، جس کی اونچائی سینٹی میٹر میں نیچے دی گئی ہے :

120, 106, 115, 102, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110

کھیل استانی جماعت کو ایسی دو گروہ میں بانٹنا چاہتی ہے جو ایک بڑی اونچائی کا گروہ ہو اور ایک نیچی کا اونچائی گروہ۔ وہ منظم(Arange) کس طرح کرے گی؟

$$\frac{120+106+115+102+123+125+117+120+112+115+110}{11}$$

$$=\frac{1247}{11}=113.36$$

اس طرح وسطی اونچائی سے کم اونچائی والے حصے میں 4 بچے اور وسطی اونچائی سے زیادہ اونچائی والے حصے میں 7 ہوں گے۔ یعنی دونوں گروہ (جماعت) میں بچے برابر نہیں ہوں گے۔ اس لیے ایسی حالتوں کے لیے ایک دوسری نمائندہ قیمت کی ضرورت ہوگی۔ آیئے وسطانیہ کے بارے میں سوچیں۔

وسطانیہ، دیئے گئے آنکڑوں میں وہ قیمت ہوتا ہے جو اسے ٹھیک ٹھیک دو حصوں میں منقسم کر دیتا ہے۔ آدھے مشاہدے اس سے زیادہ قیمت والے ہوتے ہیں اور آدھے مشاہدے اس سے کم قیمت والے ہوتے ہیں۔

دیئے گئے آنکڑوں کا وسطانیہ نکالنے کے لیے آنکڑوں کو بڑھتی ترتیب یا گھٹتی ترتیب میں سجاتے ہیں۔ جب مشاہدہ کی تعداد (n) جو طاق عدد ہوتا ہے۔ وسطانیہ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ویں مشاہدہ کی قیمت ہوتی ہے۔ مثال کے لیے اگر $n=11$ ہے تو $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ویں یعنی $\frac{11+1}{2}=\frac{12}{2}=6$ ویں مشاہدہ کی قیمت وسطانیہ ہوگی یعنی 102, 106, 110, 112, 115, 117, 120, 120, 123, 125 میں 115 وسطانیہ ہوگا۔

اس طرح وسطانیہ (جب مشاہدہ کی تعداد) = طاق ہو = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$واں مشاہدہ

جب مشاہدوں کی تعداد(n) جفت عدد ہو تو وسطانیہ $\left(\frac{n}{2}\right)$ویں اور $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں مشاہدہ کا اوسط ہوتا ہے۔ مثال کے لیے اگر $n=10$ ہے تو $\left(\frac{10}{2}\right)$ویں اور $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ ویں مشاہدہ کی قیمت کا اوسط یعنی پانچویں اور چھٹی مشاہدہ کی قیمت کا اوسط ہی وسطانیہ(Median) ہوگا۔

اس طرح وسطانیہ (جب مشاہدہ کی تعداد = جفت) = $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}\right.$ ویں مشاہدہ + $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ویں مشاہدہ$\left.\right)$

مثال: 4 ایک جماعت کے 9 طلبہ کی (سینٹی میٹر میں) لمبائی حسب ذیل ہے:

155, 160, 145, 149, 150, 147, 152, 144, 148

ان آنکڑوں کا وسطانیہ معلوم کیجیے۔

حل: سب سے پہلے ہم ان آنکڑوں کو بڑھتی ترتیب (یا گھٹتی ترتیب) میں اس طرح لکھتے ہیں:

144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 155, 160

یہاں طلبہ کی تعداد 9 یعنی طاق ہے۔ اس لیے ہم $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ویں = $\left(\frac{9+1}{2}\right)$ ویں = 5 ویں طلبہ کی لمبائی جو کہ 149 سینٹی میٹر ہے، معلوم کر کے وسطانیہ حاصل کر لیتے ہیں۔ اس لیے وسطانیہ لمبائی 149 سینٹی میٹر ہے۔

مثال: 5 کبڈی کی ایک ٹیم(Team) کے ذریعہ بہت سارے مقابلوں میں حاصل کیے گئے نمبر حسب ذیل ہیں :

17, 2, 7, 27, 15, 5, 14, 8, 10, 24, 48, 10, 8, 7, 18, 28

ٹیم کے ذریعہ حاصل کیے گئے اعداد کا وسطانیہ(Median) معلوم کیجیے۔

حل: ٹیم کے ذریعہ حاصل کیے گئے اعداد کی بڑھتی ترتیب :

2, 5, 7, 7, 8, 8, 10, 10, 14, 15, 17, 18, 24, 27, 28, 48

یہاں 16 آنکڑے جو جفت عدد ہیں۔ اس لیے یہاں دو وسطی آنکڑے ہیں۔

یہ $\left(\frac{16}{2}\right)$ ویں اور $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ ویں یعنی 8 ویں اور 9 ویں آنکڑے ہیں۔

اس لیے 8 ویں اور 9 ویں آنکڑوں کا اوسط ہی وسطانیہ ہوگا۔

اس لیے وسطانیہ = $\frac{10+14}{2} = 12$

اس لیے کبڈی ٹیم کے ذریعہ حاصل کیے گئے وسطانیہ عدد 12 ہیں۔

4.7- وسطی (Mode)

ہم نے دیکھا کہ اوسط اور وسطانیہ مرکزی رجحانات کی ناپ یا نمائندہ ناپ ہے۔ لیکن کیا یہ ہماری ساری ضرورتوں کے لیے موزوں ہے۔ آؤ ایک مثال کو دیکھیں۔

ایک دکاندار کی قمیصوں کے فروخت کا ریکارڈ(Record) اس طرح ہیں :

ناپ cm میں	90	95	100	105	110
فروخت کی گئی قمیصوں کی تعداد	8	22	32	37	6

اب دکاندار قمیصوں کے اسٹاک(Stock) کے لیے رجحان کے مقدار کا اندازہ کرے کہ وہ اپنے خریدار کی ضرورتوں کو پورا کر پائے۔

دیکھیں کہ وسطی اور وسطانیہ کے ذریعہ کیا مقدار آتے ہیں۔

فروخت کی گئی قمیصوں کا اوسط $\frac{8+22+32+37+6}{5} = \frac{105}{5} = 21$

یعنی وہ ہر ایک ناپ کی 21 قمیصوں کو اسٹاک میں رکھیں۔

فروخت کی گئی قیمصوں کا وسطانیہ(Median) =37 ,32 ,22 ,8 ,6 کا $\frac{5+1}{2}$ ویں قیمت = تیسری قیمت = 22 ہے۔

اس لیے وہ ہر ایک ناپ کی 22 قمیص اسٹاک میں رکھے۔ ظاہر ہے کہ ریڈی میڈ(Ready made) کپڑوں کے دکاندار کے لیے وسطی اور وسطانیہ جیسے تعداد مناسب نہیں ہیں۔ یہاں دکاندار قمیص کے اس ناپ کو دیکھے گا۔ جو سب سے زیادہ فروخت ہوتی ہے۔ یہ آنکڑوں کا ایک الگ نمائندہ قیمت ہے۔ سب سے زیادہ فروخت 105 سینٹی میٹر ناپ کی قیمصوں کی 37 ہیں۔ یہ نمائندہ قیمت 105 اعداد کا وسطی(Mode) کہلاتا ہے۔

اس طرح وسطی وہ مشاہدہ ہوتی ہے جو سب سے زیادہ بار رونما ہوتا ہے۔

مثال: 6 مندرجہ ذیل اعداد کا وسطی(Mode) معلوم کیجیے:

1, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 2, 2, 4

حل: یکساں قیمت والے اعداد کو ایک ساتھ ترتیب دینے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4

ان اعداد وسطی(Mode) 2 ہے۔ کیوں کہ وہ دوسرے مشاہدے کے مقابلہ میں زیادہ بار آتا ہے۔

4.7.1 - بڑے آنکڑوں کا وسطی

اگر مشاہدوں کا عدد بڑا ہو تو ان کو یکساں قیمت والے مشاہدوں کی صورت میں ترتیب دینا اور پھر ان کو گننا اتنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ ایسی حالت میں ہم اعداد کو جدول نما کرتے ہیں۔ جیسا کہ آپ پچھلی جماعت میں کر چکے ہیں۔ آنکڑوں کا جدول بنانے کا کام میلان نشان(Tally marks) سے شروع کرتے ہوئے مشاہدوں کی آمد (Frequencies) بنا کر پورا کیا جا سکتا ہے۔ یعنی کسی آنکڑے کی آمد وہ عدد ہے، جتنی بار وہ آنکڑا یا مشاہدہ اس مجموعے میں آتا ہے۔

مثال: ایک اسکول کی ساتویں جماعت کے 22 طلبہ کے ذریعہ (100 عدد میں سے) حاصل کیے گئے نمبر حسب ذیل ہیں:

10, 20, 36, 50, 50, 56, 60, 60, 70, 70, 36, 60, 40, 50,

50, 56, 60, 70, 60, 60

ان آنکڑوں کا وسطی معلوم کیجیے۔

حل: ان اعداد کو ایک جدول کی صورت میں رکھنے پر

عدد	ملان علامت یا نشان	طلبہ کی تعداد کثرت (Frequency)
10	I	1
20	I	1
36	III	3
40	II	2
50	IIII	4
56	II	2
60	~~IIII~~ I	6
70	III	3

اس جدول کو دیکھ کر فوراً ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ 60 وسطی (Mode) ہے۔ کیوں کہ 60 سب سے زیادہ بار آیا ہے۔ اس طرح بہت سارے طلبہ نے 60 عدد حاصل کیے ہیں۔ ایک مقررہ نمبر حاصل کرنے والے طلبہ کی تعداد کو اس عدد کی آمد (Frequency) کہتے ہیں۔ سب سے بڑے آمد والے مشاہدے کو عمومی اوسط (Mode) کہتے ہیں۔ کیا اعداد کے ایک مجموعے میں دو وسطی (Mode) ہو سکتے ہیں؟ سوچئے اور بحث کیجیے۔

مثال: 8 مندرجہ ذیل اعداد کا وسطی معلوم کیجیے۔

2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

حل: یہاں 2 اور 5 دونوں ہی تین بار آئے ہیں۔ اس لیے یہ دونوں ہی اعداد کے اوسطی (Mode) ہیں۔

خود کر کے دیکھیے:

1- آپ اپنی جماعت کے دوستوں کی عمر سالوں میں ریکارڈ (Record) کیجیے اور پھر ان کا عمومی وسطی (Mode) معلوم کیجیے۔

2- مندرجہ ذیل اعداد کا وسطی (Mode) معلوم کیجیے:

12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
17, 13, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14

3- 25 بچوں کی اونچائی (cm میں) نیچے دی گئی ہے:

168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163
160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162

ان کی لمبائیوں کا وسطی (Mode) کیا ہے؟ یہاں وسطی (Mode) سے آپ کیا سمجھتے ہیں؟

مثال: 9 ایک کارخانہ میں 5 آدمی کام کرتے ہیں۔ جس میں ایک سپروائزر ہے اور چار مزدور۔ ہر ایک مزدور کو ہر ماہ 5000 روپے تنخواہ ملتی ہے۔ جب کہ سپروائزر کو ہر ماہ 15000 روپے۔ ان کی تنخواہوں اوسط، وسطانیہ اور وسطی معلوم کیجیے۔

حل: $\frac{5000+5000+5000+5000+15000}{5} = \frac{35000}{5} = 7000$

اس لیے اوسط تنخواہ 7000 روپے فی ماہ ہے۔

وسطانیہ(Median) معلوم کرنے کے لیے ہم تنخواہ کے اعداد کو اس طرح بڑھتی ترتیب میں رکھتے ہیں: $5000+5000+5000+5000+15000$

کیوں کہ فیکٹری میں کام کرنے والے لوگوں کی تعداد 5 ہے۔ اس لیے وسطانیہ مشاہدہ

$\frac{5+1}{2}$ واں = $\frac{6}{2}$ واں = تیسرا مشاہدہ ہوگا۔ اس لیے وسطانیہ تیسرے مشاہدے کی قیمت، یعنی 5000 روپے فی ماہ ہوگی۔

تنخواہوں کا وسطی 5000 روپے (کیوں کہ سب سے زیادہ آدمیوں کی تنخواہ 5000 روپے ہے) فی ماہ۔

یہاں اعداد کا اوسط 7000 روپے ہے۔ جو آنکڑوں کی آخری قیمت سے متاثر ہے۔ یہ اوسط کی کمزوری ہے۔ اگر کچھ اعداد میں فرق بہت زیادہ ہو جیسے(1, 7, 8, 9, 9) تو اس حالت میں اوسط ان آنکڑوں کی اچھی نمائندگی (Represent) نہیں کرتی ہے۔ وسطانیہ اور وسطی آنکڑوں میں واقع آخری قیمتوں سے متاثر نہیں ہوتے ہیں۔ ریڈی میڈ گارمنٹس(Ready made Garments) (تیار شدہ کپڑے) کے کارخانے اور جوتا کارخانے مرکزی رجحانات کے وسطی کے مقدار کا استعمال کرتے ہیں اور فیصلہ لیتے ہیں کہ کس سائز یا ناپ کا مال زیادہ سے زیادہ تیار کیا جانا چاہیے۔

سوچیے اور بحث کیجیے: کون سی مرکزی رجحان (نمائندہ قیمت) مناسب ہوگا۔

(i) آپ کو ایک پکنک(Picnic) میں 10 ساتھیوں کے لیے ضروری پوڑیوں کے بارے میں فیصلہ لینا ہے۔

(ii) ایک پکنک پر جاتے وقت ہر ایک ساتھی کے لیے صرف ایک ہی پھل خریدا جانا ہے، تب ہم کون سا پھل خریدیں گے؟

مثال: 10 مینا اور منٹو کو ان کے امتحان کی کاپیاں دی گئی ہیں۔ امتحان میں 10-10 نمبر کے پانچ سوال تھے۔ اس امتحان میں ان کے حاصل شدہ نمبر حسب ذیل تھے:

سوالوں کے بالترتیب اعداد	1	2	3	4	5
مینا کا حاصل شدہ نمبر	10	8	9	8	7
منٹو کا حاصل شدہ نمبر	4	7	10	10	10

امتحان کی کاپیاں حاصل ہونے پر مینا اور منٹو دونوں اپنے اپنے نمبروں پر تذکرہ شروع کیا۔ مینا نے کہا میرا اوسط حاصل شدہ نمبر $\frac{42}{5} = 8.4$ ہے۔ منٹو نے کہا میرا اوسط حاصل نمبر $\frac{41}{5} = 8.2$ ہے۔

کیوں کہ مینا کی اوسط حاصل نمبر سے زیادہ تھا۔ اس لیے مینا کا کہنا تھا کہ امتحان میں منٹو کے مقابلے میں اس کا مظاہرہ اچھا رہا ہے۔ لیکن منٹو اس سے راضی نہیں تھا۔ اُس نے دونوں کا حاصل نمبر سیدھی ترتیب میں رکھا اور اوسط نمبر اس طرح حاصل کیا:

مینا کا حاصل شدہ نمبر	7	8	(8)	9	10
منٹو کا حاصل شدہ نمبر	4	7	(10)	10	10

منٹو کا کہنا تھا کہ اس کا بیچوں بیچ کا حاصل نمبر 10 ہے۔ جو کہ مینا کے بیچوں بیچ حاصل نمبر یعنی 8 سے زائد ہے۔ اس لیے امتحان میں اس کی کارکردگی کو سب سے اچھی مانی جانی چاہیے۔

لیکن مینا اس کی دلیل سے مطمئن نہیں تھی۔ مینا کو اپنی بات سے مطمئن کرانے کے لیے منٹو نے ایک دوسرا طریقہ اپنایا، جو حسب ذیل تھا:

مینا کا حاصل شدہ نمبر	7	8	(8)	9	10
منٹو کا حاصل شدہ نمبر	4	7	(10)	(10)	(10)

منٹو نے کہا کہ میں نے 10 عدد زیادہ بار (3 بار) حاصل کیے ہیں۔ جب کہ مینا نے 8 عدد زیادہ بار (2 بار) حاصل کیے ہیں۔ اس لیے امتحان میں اس کا مظاہرہ اچھا رہا ہے۔

پہلی حالت میں مینا جو اوسط حاصل عدد لائی تھی، وہ ہے اوسط (Mean)

بیچ حاصل عدد جس کو منٹو نے اپنی دلیل میں استعمال کیا تھا، وہ ہے وسطانیہ(Median)

اپنے دوسرے قول میں منٹو نے زاید بار زیادہ حاصل عدد حاصل کرنے کی بات کہی تھی، اور وہ ہے عمومی وسطی یعنی(Mode)

تینوں آنکڑوں کے ایک مجموعے کی مرکزی رجحان کا پیمانہ(Measure) ہیں۔

سوالنامہ : 4.2

1- ایک کرکٹ میچ میں کھلاڑیوں کے ذریعہ بنائے رَن اس طرح ہیں :

6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

ان کے رَن کی اوسط، وسطانیہ اور وسطی(Mode) معلوم کیجئے۔ کیا یے تینوں برابر ہیں؟

2- ریاضی کے ایک امتحان میں 15 طلبہ کے ذریعہ (25 نمبروں میں سے) حاصل کیے گئے نمبر حسب ذیل ہیں:

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

3- ان اعداد کی وسطی اور وسطانیہ معلوم کیجیے :

38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

کیا اس کے ایک سے زیادہ وسطی(Mode) ہیں۔

4- ایک فٹ بال ٹیم نے فٹ بال کے 10 مقابلوں میں حسب ذیل گول کیے :

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4 3

ان کا اوسط، وسطانیہ اور وسطی(Mode) معلوم کیجیے۔

5- بتایئے کہ مندرجہ ذیل اقوال صحیح ہیں یا غلط ؟

(i) اوسط ہر ایک مشاہدہ سے بڑا ہوتا ہے۔

(ii) اوسط ہر ایک مشاہدہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

(iii) اوسط سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے مشاہدے کے بیچ میں واقع ہوتا ہے۔

(iv) دو اعداد کی اوسط ہمیشہ ان کے بیچ میں واقع ہوتا ہے۔

(v) اوسط دیئے ہوئے اعداد میں سے ایک عدد ہو سکتا ہے۔

(vi) وسطی(Mode) ہمیشہ آنکڑوں میں سے ایک ہی عدد ہوتا ہے۔