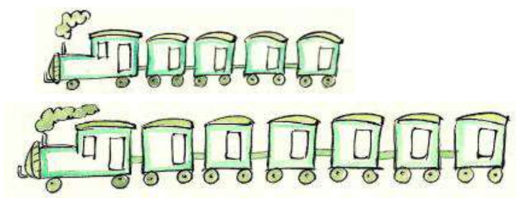
अध्याय - 8

राशियों की तुलना
(COMPARISON OF QUANTITIES)



8.1 भूमिका

हम जानते हैं कि अनुपात का अर्थ है दो मात्राओं की तुलना करना।

मान लीजिए दो रेलगाड़ियाँ हैं जिनकी लम्बाई क्रमशः 80 मीटर व 160 मीटर है। तो पहली रेलगाड़ी की लम्बाई का दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई से अनुपात = 80 : 160 है।

यह तुलना भिन्नों की सहायता से $\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$ या 1 : 2 के रूप में भी कर सकते हैं।

अतः पहली रेलगाड़ी की लम्बाई, दूसरी की आधी है।

इस प्रकार दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई, पहली की कितने गुना होगी?...................

इसे इस प्रकार भी समझ सकते हैं।

दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई : पहली रेलगाड़ी की लम्बाई

160 : 80 या $\frac{160}{80} = \frac{2}{1}$ अतः 2 : 1

अतः दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई पहली रेलगाड़ी की दुगुनी है।

आप सोचिए कि $a : b$ व $b : a$ किस स्थिति में समान होंगे?

यहाँ पर हम देखते हैं कि 1 : 2 और 2 : 1 दोनों समान अनुपात नहीं है। उसी प्रकार

$a : b$ और $b : a$ दो अनुपात है क्योंकि $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

यह तुलना हम प्रतिशत के उपयोग से भी कर सकते हैं।

$$\frac{\text{पहली रेलगाड़ी की लम्बाई}}{\text{दूसरी रेलगाड़ी की लम्बाई}} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{50}{50} = \frac{50}{100} = 50\%$$

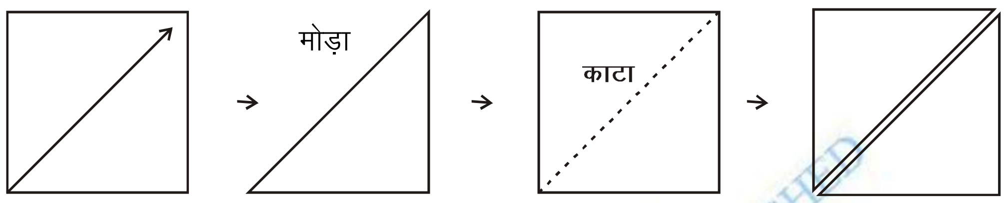
(हर को 100 बनाया गया है)

पहली रेलगाड़ी की लम्बाई दूसरी की 50% है।

गतिविधि

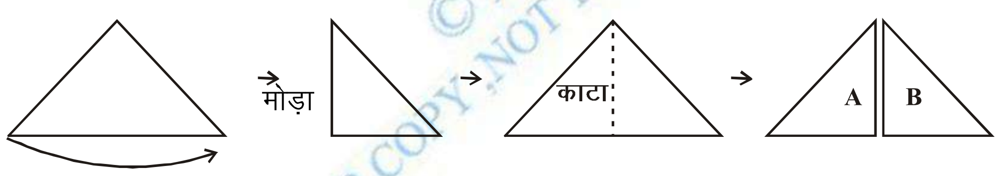
आओ बबलू और नेहा की अनुपातों के सवालों को हल करने में मदद करें।

बबलू ने एक वर्गाकार कागज लिया और उसके एक कोने को दूसरी तरफ के कोने से मिलाया और फिर मोड़ से काट दिया



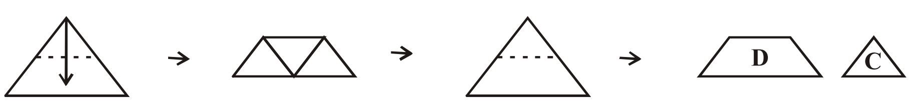
आप बताइये इस प्रकार बने एक त्रिभुज व शुरूआत में लिये गये वर्गाकार पेज के क्षेत्रफलों में क्या अनुपात है?

अब नेहा ने ऊपर कटे हुए एक त्रिभुज को लेकर नीचे दिए गए चित्रानुसार काटा और बने त्रिभुजों पर A व B अंकित किया।



इस प्रकार बने त्रिभुज A के क्षेत्रफल व प्रारम्भिक त्रिभुज के क्षेत्रफल में क्या अनुपात होगा?

बबलू ने A व B में से एक त्रिभुज को लेकर इस तरह से मोड़ा–



क्या आप C व D के क्षेत्रफलों के बीच अनुपात बता सकते हो?

इस चित्र से तो लग रहा है कि C जैसी तीन त्रिभुजाकार आकृति D में है? सोचिए क्या यह सही है?

अपने अनुपातों को जांचने के लिए आप वर्गाकार कागज लेकर इस गतिविधि को करके देख सकते हैं।

© BSTBPC WEB COPY, NOT TO BE PUBLISHED

स्थिति–I A की C से तुलना करने पर

A, C का 4 गुना है अतः $A : C = 4 : 1$

स्थिति–II C की A से तुलना करने पर

C, A का चौथाई $\left(\frac{1}{4}\right)$ है अतः $C : A$

$\frac{1}{4} : 1$

$\frac{1}{4} \times 4 : 1 \times 4$ (दोनों पदों में 4 से गुणा करने पर)

$1 : 4$

आपने देखा कि $A : C \neq C : A$

स्वयं करके देखिए

नीचे कुछ राशियों के उदाहरण दिए गए हैं। बताइए उनमें से किन–किन राशियों के अनुपात आप निकाल सकते हैं?

1. 200 मीटर व 15 सैकण्ड
2. 15 किमी. व 7000 मी.
3. 170 सेमी. व 165 सेमी.
4. 500 रु. व 250 व्यक्ति

सामान्य रूप में अनुपात $a : b$ को $\frac{a}{b}$ के रूप में लिख कर भी व्यक्त करते हैं।

अनुपात के इस रूप का उपयोग आपने दर निकालने में भी किया था–

उदाहरण–1. 15 पेनों की कीमत 120 है तो 24 पेनों की कीमत कितनी होगी।

हल : हम जानते हैं कि–

15 पेनों की कीमत है = 120 रु.

तब 1 पेन की कीमत होगी = $\frac{120}{15}$ रु.

इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं 8 रु. प्रति पेन

दर, अनुपात का वह रूप है जिसमें असमान राशियों की तुलना की जाती है।

अब प्रति पेन की कीमत द्वारा हम 24 पेनों की कीमत आसानी से निकाल सकते हैं।

$24 \times 8 = 192$ रु.

उदाहरण–2. प्रवीण किसी परीक्षा में 294 अंक प्राप्त करता है, जबकि उसकी बहन गुंजन उसी परीक्षा में 372 अंक लाती है। यदि प्रवीण को परीक्षा में 49 प्रतिशत अंक प्राप्त होता है तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए–

अ. परीक्षा में प्रवीण के अंकों का उसकी बहन गुंजन के अंकों से अनुपात

ब. गुंजन के द्वारा प्राप्त अंकों का प्रतिशत में मान?

स. किसके अंक प्रतिशत में अधिक है और कितने अधिक है?

हल : अ. प्रवीण द्वारा परीक्षा में प्राप्त अंक का गुंजन द्वारा परीक्षा में प्राप्त अंकों से अनुपात

= 294 : 372 अथवा, $\frac{294}{372} = \frac{294 \div 6}{372 \div 6} = \frac{49}{62}$

(अनुपात का सरल रूप संख्याओं का म.स. निकालकर)

$\frac{49}{62}$ को 49 : 62 के रूप में लिखा जाता है और 62 की तुलना में 49 पढ़ा जाता है।

ब. सबसे पहले हम परीक्षा के पूर्णांक का पता लगाएंगे।

मान लीजिए परीक्षा का पूर्णांक x है,

दिया गया है – प्रवीण को परीक्षा में 49 प्रतिशत अंक मिले

इसलिए x का 49% $= 294$

या, $x \times \frac{49}{100} = 294$

या, $x \times 49 = 294 \times 100$

या, $x = \frac{294 \times 100}{49} = 600$

अतः परीक्षा का पूर्णांक $= 600$

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

ऐकिक नियम द्वारा

49% अंक बराबर है = 294

तो 1% अंक बराबर होगा = $\frac{294}{49}$ = 6

1% = 6 अंक

अतः परीक्षा के 100% अंक होगें = 1% × 100 = 6 × 100

100% = 600

चूंकि गुंजन 600 अंकों में 372 अंक प्राप्त करती है

गुंजन के प्राप्तांक प्रतिशत में $\frac{372 \times 100}{600}$ = 62% प्राप्त करती है।

गुंजन द्वारा प्रतिशत में प्राप्त अंक = 62%

गुंजन द्वारा परीक्षा में 62% अंक लाया गया है जबकि प्रवीण द्वारा परीक्षा में 49% अंक लाया गया है।

गुंजन द्वारा प्रतिशत में प्राप्त अधिक अंक = 62% - 49% = 13%

अतः गुंजन ने प्रवीण से 13% अधिक अंक प्राप्त किए है।

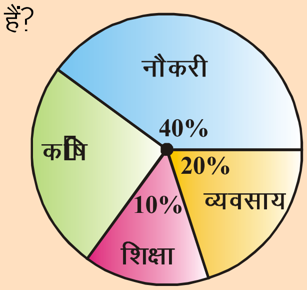
स्वयं करके देखिए

किसी गांव में रहने वाले 150 युवा लोगों में से 40% युवा लोग नौकरी में, 20% व्यवसाय में, 15% शिक्षा प्राप्ति में एवं शेष कृषि कार्य में लगे हैं। तो बताइए–

अ. कितने प्रतिशत युवा लोग कृषि कार्य में लगे हैं?

ब. नौकरी करने वाले युवा और शिक्षा प्राप्त करने वाले युवा लोगों का अनुपात क्या है?

स. किस–किस कार्य में सबसे अधिक युवा लोग और सबसे कम युवा लोग लगे हैं?



प्रश्नावली – 8.1

1. **सरल अनुपात ज्ञात कीजिए–**

   अ. 14 मीटर का 7 मीटर 35 सेमी. से

   ब. 3 रु. का 80 पै. से

   स. 150 किग्रा. का 210 किग्रा. से

   द. 2 घंटे का 50 मिनट से

2. **निम्नलिखित अनुपातों को प्रतिशत में परिवर्तित कीजिए–**

   अ. 3 : 25 ब. 16 : 25 स. 3 : 16

3. 60 विद्यार्थियों में से 40 प्रतिशत विद्यार्थियों को विज्ञान विषय रूचिकर लगता है तो उन विद्यार्थियों की संख्या बताइये जिन्हें विज्ञान विषय में कम रूचि है।

4. किसी परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए एक परीक्षार्थी को पूर्णांक के 33 प्रतिशत अंक प्राप्त करने हैं, उसे 225 अंक मिले जो कि 33 प्रतिशत से 6 अंक कम थे। बताइए परीक्षा में पूर्णांक क्या था?

5. रहीम अपना निवास स्थान 8 बजे सुबह छोड़ देता है और उसी दिन शाम 4 बजे अपने घर लौट आता है, तो 24 घंटे का कितना प्रतिशत वह अपने निवास–स्थान पर व्यतीत करता है?

6. पहली संख्या, दूसरी संख्या से 20% अधिक है तो दूसरी संख्या पहली संख्या से कितना प्रतिशत कम है?

© CBSE WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

8.2 प्रतिशत के अनुप्रयोग

ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए अथवा सामान की बिक्री में वृद्धि करने के लिए दुकानदार द्वारा ग्राहकों को कुछ छूट (बट्टा) दिया जाता है, जिसमें हम प्रतिशत का प्रयोग करते हैं।

किसी संस्था अथवा बैंक द्वारा निवेश या जमा की गई राशि पर लाभांश अथवा साधारण ब्याज या चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने में भी प्रतिशत का प्रयोग हम करते हैं।

उदाहरण–3. रवि ने एक पुरानी टेलीविजन 3000 रु. में खरीदा। उसने 700 रु. उसकी मरम्मत पर, 50 रु. टेम्पो भाड़ा पर खर्च कर उसे अपने दुकान पर लाया और ग्राहक को 4500 रु. में बेच दिया। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

कभी–कभी जब एक वस्तु खरीदी जाती है तो खरीदते समय अथवा बेचने से पहले कुछ अतिरिक्त धन भी खर्च किया जाता है। यह खर्च जैसे कि मरम्मत पर, श्रमिकों पर परिवहन पर खर्च की गई राशि इत्यादि हो सकती है। ये सभी होने वाले खर्च उपरी खर्च कहलाते हैं। उपरी खर्च जोड़कर किसी वस्तु का क्रय मूल्य ज्ञात किया जाता है।

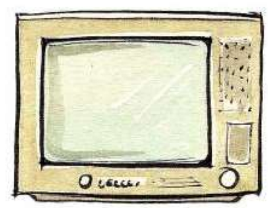
हल : टेलीविजन का क्रयमूल्य (CP) = खरीद मूल्य + उपरी खर्च

= 3000 रु. + (750 रु. + 50 रु.)

= 3000 रु. + 750 रु.

= 3750 रु.

विक्रय मूल्य (SP) = 4500 रु.



चूँकि विक्रय मूल्य > क्रयमूल्य

इसीलिए लाभ = 4500 रु. – 3750 रु. = 750 रु.

इस प्रकार 3750 रु. पर उसे 750 रु. का लाभ हुआ।

यदि क्रय मूल्य 1 होता तब लाभ होता = $\frac{750}{3750}$ रु.

अतः 100 रु. पर उसे कितना लाभ होगा?

100 रु. पर लाभ = $\frac{750}{3750} \times 100 = 20\%$

स्वयं करके देखिए

1. नीरज ने एक रेफ्रिजरेटर 9000 रु. में खरीदा। कुछ समय काम में लेकर व उसके रख रखाव/मरम्मत पर 500 रु. खर्च कर नीरज ने उसे 9000 रु. में बेच दिया। उसका लाभ/हानि प्रतिशत बताइए।
2. ऊपर के प्रश्न से हानि प्रतिशत के लिए सूत्र बनाइए।

उदाहरण–4. अमित दो कुर्सियां 550 रु. प्रति कुर्सी की दर से बेचता है। इनमें से एक पर 10 प्रतिशत का लाभ एवं दूसरे पर 20 प्रतिशत की हानि होती है। कुल लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। प्रत्येक कुर्सी का क्रयमूल्य भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है एक कुर्सी 10 प्रतिशत लाभ से बेचा जाता है। इसका अर्थ है कि यदि क्रय मूल्य 100 रु. है तो विक्रय मूल्य 110 रु. है।

ऐकिक नियम का उपयोग कर

जब 110 रु. विक्रय मूल्य हो तो क्रय मूल्य 100 रु. है।

जब विक्रय मूल्य 1 रू हो तो कय मूल्य होगा $= \frac{100}{110}$ रु.

जब 550 रु. विक्रय मूल्य है तो क्रयमूल्य $= \frac{100}{110} \times 550$ रु. = 500 रु. होगा

दूसरी कुर्सी को 20 प्रतिशत की हानि से बेचा जाता है। इसका अर्थ है–

यदि क्रय मूल्य 100 रु. है तो विक्रय मूल्य 80 रु. है।

जब विक्रय मूल्य 80 रु. है तो क्रय मूल्य 100 रु. है।

इसलिए जब विक्रय मूल्य 550 रु. है तो क्रय मूल्य $= \left(\frac{100}{80} \times 550\right)$

= 687.50 रु.

क्या आप बता सकते हैं कि कुल मिलाकर लाभ हुआ अथवा हानि? यह जानने के लिए हमें संयुक्त रूप से क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य ज्ञात करने की आवश्यकता है।

कुल क्रय मूल्य = (500 + 687.50) रु. = 1187.50 रु.

कुल विक्रय मूल्य = 550 रु. + 550 रु. = 1100 रु.

चूंकि कुल क्रय मूल्य > कुल विक्रय मूल्य

इसलिए (1187.50 – 1100) रु. अर्थात् 87.50 रु. की हानि हुई।

अतः 1187.50 (क्रय मूल्य) पर हानि हुई = 87.50

अब प्रतिशत हानि आप निकालिए

8.3 बट्टा (Discount) ज्ञात करना

दुकानदार द्वारा जिस मूल्य पर वस्तु खरीदी जाती है वह उसके लिए क्रय मूल्य और जिस पर बेची जाती है वह विक्रय मूल्य कहलाता है। कई बार दुकानदार वस्तुओं पर मूल्य अंकित कर देते हैं, और ग्राहकों को आकर्षित करने के लिए उस अंकित मूल्य पर छूट देते हैं। जिससे सामान की बिक्री में वृद्धि हो।

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

उदाहरण के लिए एक दुकानदार एक कम्प्यूटर 15000 रु. में खरीदता है और 3000 रु. बढ़ाकर (15000 + 3000) रु. = 18000 रु. उस कम्प्यूटर का अंकित मूल्य रखता है। ग्राहकों के लिए वह कम्प्यूटर के अंकित मूल्य पर 2000 रूपये की छूट देता है। अतः कम्प्यूटर का अंकित मूल्य 18000 रु. तथा विक्रय मूल्य 1600 रु. है।

जब दुकानदार अपनी किसी वस्तु को अंकित मूल्य से कम मूल्य पर बेचता है तो अंकित मूल्य और विक्रय मूल्य के अन्तर को बट्टा या छूट कहा जाता है।

अतः बट्टा अथवा छुट = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

आजकल बाजारों में Discount Sale की दुकानें लगी रहती है। याद रहे बट्टा (Discount) सदैव अंकित मूल्य पर ही दी जाती है।

उदाहरण–5. एक शर्ट (Shirt) का अंकित मूल्य 450 रु. है और दुकानदार उसे 300 रु. में देता है। आप बताइए कि इस शर्ट पर बट्टा और बट्टा प्रतिशत कितना है?

हल : बट्टा = अंकित मूल्य – विक्रय मूल्य

= 450 रु. – 300 रु.

= 150 रु.

चूंकि बट्टा अंकित मूल्य पर है इसलिए हमें अंकित मूल्य को आधार मानना पड़ेगा।

चूंकि 450 रु. अंकित मूल्य पर 150 रु. बट्टा है

इसलिए 1 रू. अंकित मूल्य का $\frac{150}{450}$ रूपया बट्टा है।

इसलिए 100 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा।

बट्टा $= \frac{150}{450} \times 100 = 33\frac{1}{3}\%$

यदि बट्टा प्रतिशत दिया हुआ है तो आप बट्टा भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण–6. एक सोफा का अंकित मूल्य 16,000 रु. है। सेल में 25 प्रतिशत बट्टे की घोषणा की जाती है। इस सोफा पर बट्टे की राशि क्या है और इसका विक्रय मूल्य क्या है?

हल : दिया हुआ अंकित मूल्य है = 16000 रु.

25 प्रतिशत बट्टे का अर्थ है कि 100 रु. अंकित मूल्य पर 25 रु. बट्टा है।

इसलिए जब अंकित मूल्य 16000 रु. है तो बट्टा = $\left(\frac{25}{100}\times 16000\right)$ रु.

$= 4000$

अतः सोफा पर बट्टा (Discount) की राशि 4000 रु. है।

सोफा का विक्रय मूल्य = (16000 – 4000) रु.

= 12000 रु.

स्वयं करके देखिए

1. एक दुकानदार अपने सभी सामानों पर 30 प्रतिशत बट्टा देता है। निम्नलिखित में से प्रत्येक का विक्रय मूल्य क्या होगा?
   - अ. 220 रु. अंकित मूल्य वाली एक पोशाक
   - ब. 1250 रु. अंकित मूल्य वाली एक जोड़ी जूते
   - स. 650 रु. अंकित मूल्य वाली एक बैग
2. एक स्कूटर 8 प्रतिशत बट्टे पर 27,600 रु. में बेची जाती है। स्कूटर का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

8.4 बिक्री कर / Value Added Tax (वैट)

बिक्री कर सरकार द्वारा वसूला जाता है। यह कर किसी वस्तु की खरीद पर दुकानदार द्वारा लिया जाता है व सरकार को दिया जाता है। यह हमेशा वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगता है। आजकल वस्तु के मूल्य में कर Value Added Tax (VAT) के नाम से जुड़ता है।

उदाहरण–7. एक साइकिल का मूल्य 2200 रु. तथा साइकिल के पम्प का मूल्य 300 रु. है। बताइए किशोर को बिक्रीकर सहित कुल कितना भुगतान साइकिल और साइकिल के पम्प के लिए करना होगा जबकि बिक्रीकर की दर 5 प्रतिशत देय है।

हल : साइकिल का मूल्य = 2200 रु.

साइकिल पम्प का मूल्य = 300 रु.

दोनों का कूल मूल्य = 2200 रु. + 300 रु.

= 2500 रु.

दोनों पर समान बिक्रीकर है, अतः मूल्यों का योग किया गया है।

बिक्री कर = 5 प्रतिशत

कुल बिक्री कर $= 2500 \times \frac{5}{100} = 125$ रु.

$\therefore$ कुल भुगतान = (2500 + 125) रु.

= 2625 रु.

उदाहरण–8. शबनम ने एक कूलर 4 प्रतिशत कर सहित 6500 रु. में खरीदा। वैट जुड़ने से पहले कूलर का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : कूलर के मूल्य में वैट (VAT) भी शामिल है।

अतः 4 प्रतिशत वैट का अर्थ है कि यदि वैट रहित मूल्य 100 रु. है तो वैट सहित मूल्य 104 रु. है।

अब यदि वैट सहित मूल्य 104 रु. है तो वास्तविक मूल्य 100 रु. है।

अतः जब कर सहित मूल्य 6500 रु. है तो वास्तविक मूल्य $= \left(\frac{100}{104} \times 6500\right)$ रु.

= 6250 रु.

प्रश्नावली – 8.2

1. रोहित एक पुराना अलमीरा 6700 रुपये में खरीदकर उस पर 300 रु. उसके मरम्मत में खर्च करता है उसके बाद उसे वह 7500 रु. में बेच देता है। उसका लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

2. **प्रत्येक के लिए x, y, z का मान ज्ञात करें।**

क्र.सं.	खरीद मूल्य	उपरी व्यय (रु. में)	क्रय मू. (रु. में)	वि.मू. (रु. में)	लाभ (रु. में)	हानि (रु. में)	लाभ%	हानि%
i.	1500 रु.	320 रु.	x	y	280	-	z	-
ii.	240 रु.	20 रु.	x	y	-	z		10%
iii.	500 रु.	x	575 रु.	y	125	-	z	-
iv.	9000 रु.	200 रु.	x	7200	-	y	-	z
v	x	50 रु.	500 रु.	y	z	-	20%	-

3. एक बिजली के पंखे को 510 रु. में बेचने पर एक दुकानदान को 15 प्रतिशत की हानि उठानी पड़ती है, बताइए दुकानदार ने पंखा कितने में खरीदा? यदि वह पंखे को 630 रु. में बेचे तो उसे कितने प्रतिशत लाभ या हानि होगी?

4. मुकेश स्पोर्ट्स की दुकान से एक फुटबॉल गेंद 20 प्रतिशत के बट्टे पर 192 रु. में खरीदता है तो फुटबाल गेंद का अंकित मूल्य क्या है?

5. एक दुकानदार एक जोड़ी जूते पर 1250 रु. मूल्य अंकित करके ग्राहक को खरीदने पर 20 प्रतिशत की छुट देता है। छुट देने के बाद भी दुकानदार को 25 प्रतिशत का लाभ प्राप्त होता है, तो जूते का क्रय मूल्य क्या है?

6. सोहन द्वारा एक डिपार्टमेंटल स्टोर से खरीदी गई सामग्री का बिल निम्नानुसार है। बिल की कुल राशि ज्ञात कीजिए।

क्र.सं.	**सामग्री का नाम**	**सामान का मूल्य**	**बिक्रीकर**	**बिक्रीकर (रुपये में)**
1.	टी शर्ट	250/–	4%	
2.	क्रॉकरी	300/–	10%	
3.	घी 1 किग्रा.	260/–	5%	
4.	मूंग दाल 1 किग्रा.	60/–	2%	

7. राखी को 250 रु. मूल्य की खेल सामग्री तथा 220 रु. मूल्य के चमड़े का बैग क्रमशः 6 प्रतिशत और 12 प्रतिशत बिक्रीकर देकर खरीदना पड़ा हो, तो बतलाइए उसने कुल कितने रुपये चुकाए?

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

8.5 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

पिछली कक्षा में हम ऐकिक नियम द्वारा साधारण ब्याज (S.I.) ज्ञात करना सीख चुके हैं। आइए, निम्न उदाहरण द्वारा इसे पुनः दोहराएं–

उदाहरण–9. 2000 रु. पर 3 वर्ष का 10 प्रतिशत वार्षिक दर से ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : 100 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = 10 रु.

अर्थात् 1 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{10}{100}$ रु.

अर्थात् 2000 रु. पर 1 वर्ष का ब्याज = $2000 \times \frac{10}{100}$ रु.

अर्थात् 2000 रु. पर 3 वर्ष का ब्याज = $2000 \times \frac{10}{100} \times 3$ रु. = 600 रु.

यहां हम देखते हैं कि 2000 रु. का 3 वर्ष का 10 प्रतिशत वार्षिक दर से ब्याज ज्ञात करने के लिए मूलधन (2000 रु.) को समय (3 वर्ष) तथा दर $\left(10\% = \frac{10}{100}\right)$ से गुणा किया जाता है। इससे यह परिणाम निकलता है कि–

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{समय} \times \text{दर}}{100}$$

अब यदि ब्याज (Interest) को I, मूलधन (Principal) को P, समय (Time) को T तथा दर (Rate of Interest) को R% वार्षिक से व्यक्त करें तो

$$I = \frac{P \times R \times T}{100}$$

इसी प्रकार मिश्रधन (Amount) को A से प्रदर्शित करें तो

$$A = P + I$$

स्वंय करके देखिए

अभिषेक द्वारा महाजन से 4000 रु., 10 प्रतिशत वार्षिक की दर से 3 वर्ष के लिए लिया गया है। साधारण ब्याज सहित मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

परन्तु सामान्यतः बैंक, पोस्ट ऑफिस, इंश्योरेन्स कम्पनी या अन्य संस्थानों द्वारा लिया जाने वाला अथवा भुगतान किया जाना ब्याज साधारण ब्याज नहीं होता है। इन संस्थाओं द्वारा ब्याज का परिकलन पिछले वर्ष की राशि जिसमें पिछले वर्ष का ब्याज संयोजित होता है पर किया जाता है। इस प्रकार से किए गए ब्याज परिकलन के तरीके को चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) कहा जाता है।

एक किसान दीनु अपने नजदीक के क्षेत्रीय ग्रामीण बैंक से उन्नत किस्म के बीज खरीदने हेतु 2000 रु. एक वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक दर पर कर्ज लेता है। दीनु को 1 वर्ष बाद कितनी राशि लौटानी होगी?

एक वर्ष बाद ब्याज की राशि $= \frac{2000 \times 10 \times 1}{100} = 200$ रु.

एक वर्ष बाद बैंक को लौटायी जाने वाली राशि = 2000 रु. + 200 रु. = 2200 रु.

परन्तु फसल की उपज नहीं होने के कारण दीनु कर्ज नहीं लौटा पाता और बैंक जाकर राशि को लौटाने के लिए एक वर्ष का समय और मांगता है। अतः दुसरे वर्ष के लिए मूलधन 2200 रु. हो जायेगा।

अब दूसरे वर्ष के अन्त में दीनू को निम्न राशि का भुगतान करना होगा—

दूसरे वर्ष का मूलधन = 2200 रु.

2200 रु. पर अगले एक वर्ष का ब्याज = = $\frac{2200 \times 10 \times 1}{100}$ = 220 रु.

दूसरे वर्ष के अंत में देय राशि = (2200 + 220) रु. = 2420 रु.

अतः 2 वर्ष बाद दीनू को 2420 रु. लौटाने होंगे।

आपने देखा कि दूसरे वर्ष का ब्याज 220 रु. है जो पहले वर्ष के ब्याज 200 रु. से 20 अधिक है। ब्याज की यह अधिक राशि, दूसरे वर्ष के अधिक मूलधन के कारण है। इस तरह से ब्याज के संयोजन को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

स्वयं करके देखिए

क्रमांक	मूलधन	दर	पहले वर्ष		दूसरा वर्ष		तीसरा वर्ष	
			ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन
1.	10,000	10%	1000	11000	1100	12100	1210	13310
2.	50,000	5%						
3.	30,000	10%						

उदाहरण–10. अनुराधा ने किसी संस्था में 5 प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 8000 रु. 3 वर्षों के लिए जमा किया। निश्चित अवधि के बाद उसको मिलने वाला चक्रवृद्धि ब्याज एवं मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल : पहले वर्ष के लिए मूलधन (P) = 8000 रु.; दर (R) = 5%; समय (T) = 1 वर्ष

पहले वर्ष का ब्याज = $\frac{P \times R \times T}{100} = \frac{8000 \times 5 \times 1}{100}$ = 400 रु.

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= 8000 रु. + 400 रु. = 8400 रु.

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन ही दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होता है।

अतः दूसरे वर्ष के लिए मूलधन $P = 8400$ रु.; दर $R = 5\%$; समय $T = 1$ वर्ष

अतः दूसरे वर्ष का ब्याज $= \dfrac{P \times R \times T}{100} = \dfrac{8400 \times 5 \times 1}{100} =$ 420 रु.

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= (8400 + 420) रु. = 8820 रु.

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन ही तीसरे वर्ष के लिए मूलधन होता है।

अतः तीसरे वर्ष के लिए मूलधन $P = 8820$ रु.; दर $R = 5\%$; समय $T = 1$ वर्ष

अतः तीसरे वर्ष का ब्याज $= \dfrac{P \times R \times T}{100} = \dfrac{8820 \times 5 \times 1}{100} =$ 441 रु.

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = पहले वर्ष का ब्याज + दूसरे वर्ष का ब्याज + तीसरे वर्ष का ब्याज

= 400 रु. + 420 रु. + 441 रु. = 1261 रु.

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज = (8000 + 1261) रु. = 9261 रु.

अतः स्पष्ट है कि चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वर्ष ब्याज की गणना करनी पड़ती है।

स्वयं करके देखिए

1. अरूणा ने अपने कम्प्यूटर सेन्टर हेतु दो कम्प्यूटरों के लिए 60,000 रुपये, 10 प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर पर लिए। बताइये अरूणा को 3 वर्ष बाद कुल कितनी रकम लौटानी होगी?
2. 10,000 रुपये का 10 प्रतिशत की दर से 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज सहित मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

8.5.1 चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र का निर्धारण

एक दिन दिनकर ने अपने अध्यापक से पूछा, ''क्या चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की कोई सरल विधि है?''

अध्यापक ने कहा, ''चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने की एक संक्षिप्त विधि है। आइए इसे ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।

माना कि $R\%$ वार्षिक ब्याज की दर से मूलधन P_1 पर ब्याज वार्षिक संयोजित होता

है। मान लिया कि $P_1 = 500$ रु. और $R = 6\%$ तथा समयावधि 2 वर्ष है।

दो वर्ष के पश्चात् मिश्रधन तथा चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करना है।

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन की गणना यहाँ $T = 1$

पहले वर्ष का ब्याज $= \dfrac{500 \times 6 \times 1}{100}$ अथवा $SI_1 = \dfrac{P_1 \times R \times 1}{100}$ रु. $= \dfrac{P_1R}{100}$

अतः पहले पहले वर्ष के अंत में मिश्रधन = मूलधन (P_1) + ब्याज (SI_1)

$500 + \dfrac{500 \times 6 \times 1}{100}$ रु. अथवा $A_1 = P_1 + SI_1 = P_1 + \dfrac{P_1R}{100}$ सार्व लेने पर

$\Rightarrow$ मिश्रधन $A_1 = 500\left(1+\dfrac{6}{100}\right)$ रु. $= P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right) = P_2$

पहले वर्ष का मिश्रधन A_1 = दूसरे वर्ष का मूलधन $= P_2$

दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन की गणना:

दूसरे वर्ष का ब्याज $= \left[500\left(1+\dfrac{6}{100}\right)\right] \times \dfrac{6 \times 1}{100}$ रु. अथवा $SI_2 = \dfrac{P_2 \times R \times 1}{100}$

$= \dfrac{500 \times 6}{100}\left(1+\dfrac{6}{100}\right)$ रु.

$P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right) \times \dfrac{R}{100}$ सार्व लेने पर

$= \dfrac{P_1R}{100}\left(1+\dfrac{R}{100}\right)$

इस प्रकार दूसरे वर्ष का मिश्रधन होगा– $A_2 = P_2 + SI_2$

$= 500\left(1+\dfrac{6}{100}\right) + \dfrac{500 \times 6}{100}\left(1+\dfrac{6}{100}\right)$ रु. $= P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right) + \dfrac{P_1R}{100}\left(1+\dfrac{R}{100}\right)$

$= 500\left(1+\dfrac{6}{100}\right)\left[1+\dfrac{6}{100}\right]$ रु $= P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right)\left[1+\dfrac{R}{100}\right]$ सार्व लेने पर

$= 500\left(1+\dfrac{6}{100}\right)^2$ रु. $= P_3$. $= P_1\left(1+\dfrac{R}{100}\right)^2 = P_3$

WEB COPY: NOT TO BE PUBLISHED BSTBPC

इसी प्रकार आगे बढ़ते हुए n वर्ष के अंत में मिश्रधन

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$ होगी

अथवा हम कह सकते हैं कि

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$ जहां P = मूलधन, R = वार्षिक दर A = मिश्रधन एवं n = वर्ष के संकेत को प्रदर्शित करता है।

यदि आपको चक्रवृद्धि ब्याज (C.I) ज्ञात करना हो तो हम जानते हैं कि

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

$$C.I = A - P$$

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

$$C.I = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

अतः चक्रवृद्धि ब्याज से संबंधित मिश्रधन व ब्याज को सीधे निकालने के लिए हम इन सूत्रों का उपयोग कर सकते हैं।

उदाहरण–11. 6000 रुपए का 3 वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन $\left[\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - 1\right]$

या, $$C.I = P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$$

यहाँ मूलधन = 6000 रु.

समय = 3 वर्ष

दर $= 10\%$ वार्षिक

$$\therefore\ C.I = 6000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 6000\left[\left(\frac{110}{100}\right)^3 - 1\right]$$

$$= 6000\left[\frac{1331}{1000}-\frac{1}{1}\right]$$

$$= 6000 \times \left[\frac{1331-1000}{1000}\right] = 6000 \times \frac{331}{1000} = 1986 \text{ रु.}$$

$\therefore$ चक्रवृद्धि ब्याज = 1986 रु.

8.5.2 चक्रवृद्धि ब्याज की समयावधि

उपरोक्त उदाहरणों में चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वार्षिक आधार पर की गई है किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि सदैव चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वर्षवार की जाए।

आइए, हम देखते हैं कि यदि ब्याज का वार्षिक अथवा अर्द्धवार्षिक संयोजन किया जाय तो 100 रु. के ब्याज में कितना परिवर्तन होगा?

$P = 100$ रु. और 10% वार्षिक दर पर ब्याज का वार्षिक संयोजन

समय अवधि 1 वर्ष है

$$I = \frac{100\times10\times1}{100} = 10$$

$A = 100$ रु. $+ 10$ रु.

$= 110$ रु.

$P = 100$ रु. और 10% वार्षिक दर पर ब्याज का अर्द्धवार्षिक संयोजन

समय अवधि 1 वर्ष

$$I_1 = \frac{100\times\boxed{10\times\frac{1}{2}}}{100} = 5$$ रु. पहले 6 महिने का ब्याज

$A = 100$ रु. $+ 5$ रु. $= 105$ रु.

अब अगले छह महीने के लिए $P = 105$ रु.

अतः $I_2 = \dfrac{105\times10\times\frac{1}{2}}{100}$ रु. $= 5.25$ रु.

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE PUBLISHED

और $A = 105$ रु. $+ 5.25$ रु. $= 110.25$ रु.

चूंकि ब्याज संयोजन अर्द्धवार्षिक है $P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^{T}$

1 वर्ष में 6 माह 2 बार आता है अतः T को दूगना कर देते हैं।

वह दर चूंकि वार्षिक होती है अर्द्धवार्षिक होने पर उसे आधा कर देते हैं।

$$= 100\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{2}$$

$$= 100 \times \left(\frac{21}{20} \times \frac{21}{20}\right)$$

$$= 110.25$$

ऊपर हमने देखा कि यदि ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित होता है तो हम ब्याज की गणना दो बार करते हैं। इसलिए समय अवधि दुगुना हो जाती है और दर आधी कर दी जाती है।

स्वयं करके देखिए

निम्नलिखित में ब्याज संयोजन के लिए समय अवधि एवं दर ज्ञात कीजिए–

1. 2 वर्षों के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।
2. $1\frac{1}{2}$ वर्षों के लिए 6 प्रतिशत वार्षिक दर पर उधार ली गई एक राशि पर ब्याज अर्द्धवार्षिक संयोजित किया जाता है।

उदाहरण–12. उर्मिला ने 2000 रु. 20 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिए। यदि ब्याज की गणना प्रति छः माही की जाती हो तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष बाद उसे कितनी रकम चुकानी होगी? ब्याज की राशि भी बताइए?

हल : प्रश्नानुसार मूलधन $(P) = 2000$ रु.

दर $(R) = 20$ प्रतिशत वार्षिक = 10 प्रतिशत अर्द्धवार्षिक या छः माही

समय $(n) = 1\frac{1}{2}$ वर्ष = 3 छमाही

चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन A $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$= 2000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3$

$= 2000 \times \left(1+\frac{1}{10}\right)^3$

$= 2000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^3 = 2000 \times \frac{1331}{1000}$

= 2662 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज = मिश्रधन − मूलधन

= (2662 − 2000) रु.

= 662 रु.

उदाहरण–13. 3200 रु. पर 12 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार मूलधन (P) = 3200 रु.

दर (R) = 12%

समय (T) = 2 वर्ष

साधारण ब्याज $= \frac{P \times R \times T}{100}$

$= \frac{3200 \times 12 \times 2}{100}$

= 768 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज $= P\left[\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - 1\right]$

$= 3200\left[\left(1+\frac{12}{100}\right)^2 - 1\right]$

$= 3200\left[\left(\frac{112}{100}\right)^2 - \frac{1}{1}\right]$

WEB COPY ©BSTBPC NOT TO BE PUBLISHED

ब्याज का अन्तर = चक्रवृद्धि ब्याज–सा. ब्याज

= (814.08 – 768) रु. = 46.08 रु.

$$= 3200\left[\frac{12544-10000}{10000}\right]$$

$$= 3200\times\frac{2544}{10000} = 814.08 \text{ रु.}$$

8.5.3 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के अनुप्रयोग

अभी तक हमने चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का प्रयोग करके किसी धन की निर्धारित अवधि के बीच में वृद्धि पर विचार किया है। परन्तु कुछ ऐसी स्थितियां भी है जहां पर इसके सूत्र का उपयोग करके जनसंख्या में वृद्धि अथवा कमी (ह्रास) एवं किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि या कमी पर विचार किया जाएगा।

जनसंख्या–वृद्धि की दर से हमें पता चल सकता है कि किसी विशेष वर्ष के अंत में देश में जनसंख्या कितनी हो जाएगी। इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाएगा–

यदि वर्तमान जनसंख्या = P, जनसंख्या–वृद्धि की वार्षिक दर = r% और n वर्ष के अंत में जनसंख्या = Q, हो तो

$$Q = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

यदि जनसंख्या में वृद्धि के स्थान पर ह्रास हो, तो उपर्युक्त सूत्र ही प्रयोग में लाया जाएगा, केवल दर के स्थान पर r को ऋणात्मक लेना होगा। अतः जनसंख्या–ह्रास की स्थिति में–

$$Q = P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$$ सूत्र का प्रयोग करेंगे।

ठीक इसी प्रकार किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि या कमी परिकलित करने के लिए जनसंख्या वृद्धि या ह्रास के सूत्र के समान ही सूत्र उपयोग में लाया जाएगा।

आइए कुछ उदाहरण लें:

उदाहरण–14. एक गांव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 10 प्रतिशत बढ़ जाती है। यदि इस समय उसकी जनसंख्या 8000 है तो 3 वर्ष पश्चात् उसकी जनसंख्या क्या हो जाएगी।

हल : सूत्र के द्वारा हम जानते हैं कि

$$n \text{ वर्षों के बाद जनसंख्या} = \text{आज की जनसंख्या} \times \left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^n$$

$$\therefore \text{ 3 वर्षों के बाद जनसंख्या} = 8000 \times \left(1+\frac{10}{100}\right)^3$$

$$= 8000 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= 10648$$

अन्य तरीके से भी हम इसका हल निकाल सकते हैं।

1 वर्ष के पश्चात् गांव की जनसंख्या में वृद्धि $= 8000$ का 10%

$$= 8000 \times \frac{10}{100} = 800$$

अतः 1 वर्ष के बाद गांव की जनसंख्या $= 8000 + 800 = 8800$

दूसरे वर्ष के पश्चात् गांव की जनसंख्या में वृद्धि $= 8800$ का 10%

$$= 8800 \times \frac{10}{100} = 880$$

अतः दूसरे वर्ष के बाद गांव की जनसंख्या $= 8800 + 880 = 9680$

फिर तीसरे वर्ष के पश्चात् गांव की जनसंख्या में वृद्धि $= 9680$ का 10%

$$= 9680 \times \frac{10}{100} = 968$$

अतः तीसरे वर्ष के बाद गांव की जनसंख्या $= 9680 + 968 = 10648$

उदाहरण–15. एक मोटरसाइकिल 55000 में खरीदा गया। 8 प्रतिशत वार्षिक दर से इसके मूल्य का अवमूल्यन हो गया। 2 वर्ष के बाद मोटरसाइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : अवमूल्यन का अर्थ है वस्तु के मूल्य में कमी होना।

© BSTBPC WEB COPY NOT TO BE REPUBLISHED

सूत्र का उपयोग: 2 वर्ष के बाद मोटरसाईकिल का मूल्य $= 55000\left(1-\frac{8}{100}\right)^2$ रु.

$$= 55000 \times \frac{92}{100} \times \frac{92}{100}$$

$$= 46552 \text{ रु.}$$

स्वयं कीजिए

संगीता ने एक मोबाईल सेट 12000 रु. में खरीदी। 1 वर्ष बाद उस मोबाईल सेट के मूल्य में 5 प्रतिशत का अवमूल्यन हो गया। एक वर्ष पश्चात् मोबाईल सेट का मूल्य ज्ञात कीजिए।

प्रश्नावली – 8.3

1. सुधीर ने एक कोट 4500 रु. मूल्य के खरीदे। उसे बिक्रीकर के 6 प्रतिशत अतिरिक्त देने पड़े तो बताइए कि सुधीर ने कोट खरीदने में कुल कितने रुपए लगाए।
2. एक दुकानदार ने अपनी दुकान से 3 महीने की बिक्री के बाद 4500 रु. वैट के रूप में जमा किया। यदि वैट की दर 4 प्रतिशत हो तो यह बताइए कि उसने कितनी मूल राशि का सामान बेचा।
3. रजिया ने एक दवा विक्रेता के यहां से 625 रु. अंकित मूल्य की दवाई खरीदी और उस पर 12 रु. 50 पैसे अतिरिक्त कर दिया। बताइए कि अतिरिक्त कर की दर प्रतिशत क्या थी?
4. मिश्रधन ज्ञात कीजिए जब ब्याज की गणना प्रतिवर्ष की जाती है–

   अ. 7500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 6 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

   ब. 25000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
5. **चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए**–

   अ. 6000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

   ब. 4000 रु. पर 2 वर्ष के लिए 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
6. वह धन ज्ञात कीजिए जो 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष में 7290 रु. हो जाता है।
7. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 4000 रु. 2 वर्ष में 5290 रु. हो जाता है।

8. स्वाति एक जमीन का टुकड़ा खरीदने हेतु बैंक से 40960 रु. कर्ज ली। यदि बैंक $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक दर $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए कर्ज देती है और ब्याज का संयोजन अर्द्धवार्षिक होता है तो स्वाति को कितनी राशि देनी पड़ेगी और उनके द्वारा भुगतान किया गया ब्याज की राशि भी ज्ञात कीजिए।

9. रवि ने 32,000 रु. बैंक में जमा किया। उस बैंक द्वारा जमा की गई राशि पर ब्याज का संयोजन तिमाही घोषित हो और ब्याज की दर 5 प्रतिशत वार्षिक हो तो रवि को 6 महीने बाद कितनी राशि प्राप्त होगी।

10. 5 प्रतिशत वार्षिक दर से बढ़ते हुए वर्ष 2005 के अंत में एक शहर की जनसंख्या 44,100 हो गई। बताइए वर्ष 2003 में इस शहर की जनसंख्या कितनी थी।

11. एक जनित्र (Generator) का वर्तमान मूल्य 42000 रु. है। यदि उसका अवमूल्यन 5% वार्षिक हो तो 2 वर्ष बाद उस जनित्र का मूल्य क्या होगा?

BSTBPC TO BE PUBLISHED